EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

juli 09
nr 8
jaargang 84





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

juli 09
nr 8
jaargang 84

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Redactie

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom,
Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 57,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 28,00
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 55,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:
t.a.v. Annemieke Boere
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: a.boere@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Klaske Blom]

Vakantienummer
Examens en diploma-uitreiking achter de rug, schooldeur achter u dicht getrokken en leerlingen uit uw hoofd gezet, ik hoop dat u zich inmiddels in zeeën van tijd en ruimte bevindt. Als uw tassen al gepakt staan, is er dan nog een klein gaatje voor *Euclides*? Het is een mooi nummer geworden vind ik, dit laatste nummer van jaargang 84. Of het geschikt is om door te bladeren als u zwetend en tobbend met opwaaiend zand aan het strand ligt, dat betwijfel ik. Maar, met een glaasje rosé erbij in het zonnetje op een lekker terrasje, wachtend tot de rest van de familie terugkeert uit het veel te volle zwembad, dat kan ik me wél goed voorstellen! Papier en een potloodje heeft u vast altijd wel bij de hand en bovendien kan een bierviltje goede dienst bewijzen als u nog eens wat wilt doorrekenen.

De inhoud
Het tweede deel over zwakke sleutels in het RSA-cryptosysteem vraagt om enige inspanning en misschien een wat groter papier dan een viltje om het echt te volgen; wie weet, brengt het u op ideeën voor een interessant onderwerp voor een profielwerkstuk. Verder vindt u in dit nummer berichten over actuele zaken zoals over de gehouden tussenevaluatie van de 2007- examenprogramma's. Namens de projectgroep cTWO doet Hielke Peereboom hierover verslag. Dit stuk is geschreven voordat de examenresultaten bekend waren. U kunt nu uiteraard de verwachtingen over de examens vergelijken met uw eigen opgedane ervaringen.
Gert de Kleuver, projectleider van Reken VOort, komt met een eerste bericht over de stand van zaken, en in de bijdrage van Kees Buijs kunt u lezen over een project van de SLO waarin onderzocht wordt op welke manier de rekenvaardigheden van vmbo-leerlingen versterkt kunnen worden. Rekenonderwijs, het heeft weer volop onze aandacht. In dat kader wil ik u nu vast wijzen op een studiemiddag op 25 september a.s. over goed reken-wiskundeonderwijs, georganiseerd door de NVORWO (zie verder *www.nvorwo.nl*; halverwege de home-pagina).
Terug naar de inhoud van dit nummer: twee interessante boeken over 6000 jaar geschiedenis van de wiskunde worden onder de aandacht gebracht door Jan Broeders; opvallend in beide boeken is de prachtige collectie postzegels als illustratie. Over een ander mooi boek gaat de bijdrage van Nora Blom en Bart Zevenhek: uit onvrede met recente onderwijsontwikkelingen is de sectie van het Barlaeusgymnasium een zoektocht begonnen naar goed onderwijsmateriaal; een tocht die resulteerde in een, beter bij hun leerlingen aansluitend, boek voor de 1e klas. Op internet is het vrij toegankelijk en in hun artikel beschrijven de auteurs het ontwikkelproces en de achtergronden bij deze methode. Inspirerend stuk!
Ook uit onvrede is de oproep van Hessel Pot ontstaan. Hij roept u op om te reageren op de vraag op een verhouding wel of niet hetzelfde is als een breuk. Misschien dat ook uit die onvrede nieuwe gezichtspunten geboren worden die kunnen leiden tot verbetering. Een kort en krachtig stukje van Yvonne Killian dit keer, naast de bijdragen van onze columnisten Ton Lecluse en Harm Jan Smid. En achterin, op de Verenigingspagina's, laat Douwe van der Kooi vanaf zijn plaats aan de bestuurstafel ons lezen over zijn specifieke aandachtsgebied binnen het bestuur: alles rondom opleiden en scholing van wiskundeleraren.

Interviews
Blader snel naar het interview gehouden door Marjanne de Nijs om er achter te komen waarom zij met een boeket huiswaarts keerde nadat ze collega's van AOC-Oost, VMBO Groen onderwijs in Twello had geïnterviewd. En, last but not least, een interview met Marja Bos, een jaar nadat we het nummer MS : MMSS = 1 : MS uitbrachten. Wim Laaper blikt met haar terug op de jaren waarin ze hoofdredacteur van *Euclides* was.

Op naar de volgende jaargang
Mijn eerste *Euclides*-jaar zit er op; spannend, enerverend en inspirerend vond ik het. De zenuwen zijn in de loop van het jaar verdwenen en ik heb het als een bijzonder leerzaam jaar ervaren en genoten van de plezierige samenwerking met velen. Graag wil ik hierbij Ton Lecluse en Harm Jan Smid als nieuwe columnisten en Frits Göbel als getrouwe bekende bedanken voor hun mooie bijdragen aan de afgelopen jaargang. Volgend jaar lezen we weer meer van hen. Daarnaast ben ik uiteraard zeer blij met alle auteurs die de moeite hebben genomen om een artikel in te sturen. En, uw inzendingen blijven welkom! En mocht u als vakgroep willen vertellen wat u op school bezig houdt, dan komen we langs voor een interview. Ik hoor het graag.
Alle lezers een goede vakantie gewenst.

Inhoud

Marja Bos: ‘Check, check en dubbelcheck’

INTERVIEW MET DE EX-HOOFDREDACTEUR VAN EUCLIDES

[Wim Laaper]

Ik ben onderweg naar het noordoosten van het land, naar Wachtum, dichtbij Emmen. Rijdend door Drenthe vallen door de groeiende vergezichten alle beslommeringen van je af en krijg je ruimte voor bespiegelingen over het verleden, Euclides, de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, de nuance en een goede informatievoorziening. Daar in dat kleine dorpje, in haar huis met naar alle kanten weidse uitzichten, tref ik Marja Bos, de vrouw die zeven jaar hoofdredacteur was van ons vakblad Euclides.

Het is al weer een tijd geleden dat je als hoofdredacteur bent begonnen, mei 2001. Wat stond je voor ogen toen je begon?
Even graven, hoor. Ik was er zelf niet op af gekomen. Ik kreeg een telefoontje van Wim Kuipers, bestuurslid van de NVvW. Hij had gehoord dat ik in Groningen gestopt was aan de universiteit. Dus hij dacht: ‘Die heeft mooi tijd over.’ (Gniffelend gelach breekt los.) Ik heb toen natuurlijk eerst maar eens contact opgenomen met Kees Hoogland, de toenmalige hoofdredacteur. Hem gevraagd wat zo iemand nou allemaal doet. Het leuke ervan, leek mij, was om op die manier toch weer wat dichter bij actuele ontwikkelingen in het land te zitten. En het leek me ook aantrekkelijk om zo wat dichter bij vakdidactisch onderzoek en vooral ook de vakdidactische praktijk te kunnen blijven. En ik vind het ook altijd wel nuttig om mensen te informeren. Om op die manier door het maken van een tijdschrift wat diepgaander met wiskundeonderwijs bezig te zijn dan alleen door je lespraktijk, hoeveel plezier ik daar ook aan ontleen.

Daarvoor gaf je les in Groningen, aan de universiteit.
Ja, ik was daar negen jaar wiskundedidacticus/lerarenopleider, bij Anne van Streun, naast m’n leraarsbaan op het Carmelcollege, m’n school in Emmen. Een fantastische combi-baan. Daarnaast was ik op dat moment 13 jaar lang schoolboekenschrijver en eindredacteur geweest, eerst van de methode *Wiskunde lijn* en later, na het samengaan, van *Moderne wiskunde*. Daar was ik op dat moment ook net mee gestopt. Dat is ook heftig, een methode schrijven. Veel druk van deadlines, en regelmatig rechtstreeks vanuit school een weekend een hotel induiken met een medeschrijver om eindredactiewerk te doen. Wel ontzettend leuk. Je probeert toch je vakdidactische ideeën om te zetten in tastbare praktijk. Soms lukt dat wel en soms ook niet. Schrijven vind ik dus ook leuk, al heb ik dat als hoofdredacteur betrekkelijk weinig gedaan. Ik vond het persoonlijk niet zo nodig, niet zo wenselijk, dat de hoofdredacteur zelf allerlei stukken schrijft voor het ‘eigen’ tijdschrift.
Met het hoofdredacteurschap kon ik mijn leraarsbaan in voor mij mooie, verdiepende zin aanvullen.

Idealen?
Idealen – een missie? Dat klinkt wel erg pretentieus, maar ik vind het bijvoorbeeld van groot belang dat mensen goed geïnformeerd worden. Wat dat betreft vind ik het jammer dat collega’s in het land niet altijd de tijd kunnen vinden of de tijd nemen om goed betrokken te zijn bij wat er speelt. Van alles over je vak lezen, naar bijeenkomsten gaan. Ook buiten de school om, buiten de directe kring van sectiegenoten met elkaar praten en nadenken over wiskundeonderwijs. En dat kun je natuurlijk met zo’n blad proberen een beetje te bereiken. Met elkaar nadenken over mogelijke verbeteringen van ons wiskundeonderwijs, op basis van argumenten. Het is belangrijk dat die discussie zuiver en open gevoerd wordt – in *Euclides* en daarbuiten.


Marja Bos

En dat er waarschijnlijk geen eenduidige oplossingen bestaan, dat zij dan zo.
De huidige discussie over het rekenen wordt nu van beide kanten bijna op de persoon gespeeld, en allerlei emoties spelen ondertussen een rol. Het moet gaan om de argumenten als zodanig! In die discussie blijkt trouwens regelmatig dat niet iedereen precies weet wat met ‘realistisch wiskundeonderwijs’ bedoeld wordt, hoe die theorie in elkaar steekt – steeds weer worden vooral de realistische *contexten* als karakteristiek naar voren gehaald, en dat aspect raakt niet de kern van de zaak. Dat is ook een probleem. En ook, dat mensen denken dat realistisch wiskundeonderwijs strijdig zou zijn met oefenen. Dat is niet waar, al is dat oefenen destijds niet echt gestimuleerd en is het er daardoor in de praktijk op scholen misschien wel vaak bij in geschoten.
Ik vind het ook heel jammer dat in de hitte van de strijd sommige mensen op dit moment beweren, denken, dat wiskundedidactiek niet van belang is. Didactiek is volgens mij wel degelijk belangrijk. Er

wordt wereldwijd behoorlijk veel wetenschappelijk onderzoek gedaan naar juist de didactiek van het schoolvak wiskunde. Er is veel wat nog onderzocht moet worden, maar er is ook al wel aardig veel bekend. Eén ideale didactiek is er misschien niet, maar er is echt wel onderzocht wat bijvoorbeeld het effect is van interactie.

Van welke eigenschappen van jezelf heb je vooral gebruik kunnen maken als hoofdredacteur en welke hebben je in de weg gezeten?

Mijn interesse in de wiskundedidactiek, zowel op de praktijk als wat meer theoretisch/wetenschappelijk gericht, daar heb ik voordeel van gehad. Ik was al wel redelijk goed op de hoogte. Dat kon ik goed gebruiken bij het genereren en becommentariëren van artikelen voor *Euclides*. Ook was en ben ik geïnteresseerd in actuele ontwikkelingen. En ik hou wel van taal, ik vind het prettig om talig bezig te zijn.

Maar ik heb last van het pietepeuterige van mezelf, m'n te grote aandacht voor details. Dat sloeg soms door naar het *blijven* corrigeren van allerlei kleine tekstdingetjes, werk dat eigenlijk bij de eindredacteur thuis hoort, niet bij de hoofdredacteur, en het *blijven* natrekken van heel veel zaken, en dat kostte me dan uiteindelijk onevenredig veel tijd. Het is een kwestie van balans. Natuurlijk is het heel nuttig om accuraat te zijn als hoofdredacteur, maar… e-mailtjes opnieuw doorlezen, details in de informatie nog eens op juistheid natrekken – het is noodzakelijk maar het moet wel een keer ophouden. En daar had ik wel moeite mee; ik vind het heel vervelend als ik per ongeluk ergens overheen kijk.

Misschien dat ook mijn eindeloze gezeur over nuances me in de weg heeft gezeten. Ik dreig soms te blijven steken in 'enerzijds/anderzijds'. Daarmee haal je misschien wel de scherpte uit de discussie.

Ik ga eens even iets te drinken inschenken. Met of zonder bubbeltjes?

Graag met. Nu even over de belangrijkste veranderingen in jouw periode bij Euclides. Welke zijn dat? Is de inhoud veranderd?

Ik denk dat je dit soort vragen beter aan anderen kunt stellen. Die kunnen daar beter over oordelen dan ik. Ik heb wel van alles geprobeerd maar of dat allemaal zo zichtbaar is geworden?

Ik heb bijvoorbeeld geprobeerd om het bereik van *Euclides* wat te verbreden richting vmbo-docenten. Dat is wel een béétje gelukt, maar ik ben er toch niet echt tevreden over. Deel van het probleem is dat veel leraren in het vmbo zich niet specifiek *wiskunde*docent voelen; ze geven vaak meerdere vakken en moeten hun aandacht dus spreiden over diverse gebieden, waardoor hun specifieke betrokkenheid bij wiskunde en wiskundeonderwijs natuurlijk automatisch wat kleiner wordt. En binnen deze groep leraren is het extra lastig om mensen bereid te vinden een artikel te schrijven, terwijl ze natuurlijk wél veel te vertellen hebben wat de moeite waard is. Bovendien versterkt het effect zichzelf: als er minder bijdragen vanuit het vmbo in *Euclides* staan, is het blad minder interessant voor vmbo-docenten, met als gevolg dat…, enzovoorts. Ik heb wel geprobeerd dat te doorbreken, maar dat is me niet goed gelukt.

Ik heb er ook naar gestreefd wat meer beschouwende en theoretisch-didactische artikelen in *Euclides* op te nemen, terwijl vast niet iedere lezer daar even dol op is. Dat zal me dus waarschijnlijk niet altijd in dank afgenomen zijn.

En sommige redactieleden vonden dat ik te weinig puur wiskundige artikelen plaatste. Dat zal dus ook wel voor een deel van de lezers gelden.

Verder zag ik voor *Euclides* een ondersteunende, misschien zelfs 'vormende' rol (oei!) weggelegd in verband met de vele onbevoegde en onderbevoegde wiskundedocenten die we op dit moment hebben en die zich zo, zonder adequate opleidingsachtergrond, maar moeten zien te redden in de klas.

Overigens vind ik dat het niet zo moet zijn dat een hoofdredacteur helemaal inkleurt hoe het blad er uitziet. Dat moet niet; het is geen persoonsgebonden magazine zoals bijvoorbeeld de *Linda*. Je moet wél een eigen visie hebben op welke kant het uit moet.

Heb je spijt gehad van je beslissing om te stoppen met Euclides?

Ik heb die beslissing weloverwogen genomen, me al wel realiserend dat ik het werk ook heel erg zou missen – daar hoort geen spijt bij.

Ik stopte als hoofdredacteur ten eerste omdat ik toe was aan wat meer tijd voor mezelf. Ten tweede: zeven jaar is lang zat. Het is goed dat er weer eens een fris en vrolijk gezicht komt, met nieuwe ideeën. Op dit soort plekken moeten mensen niet te lang blijven zitten. Te kort ook niet want je hebt tijd nodig om je netwerk uit te bouwen, maar ook om bijvoorbeeld samen met je redactie een goedgeoliede werkrelatie op te bouwen, een plezierig-functionerende eenheid te vormen.

Als redactie wil je graag artikelen genereren van allerlei soorten mensen. Dat is het leuke maar meteen ook het lastige. Je kunt relatief eenvoudig aan bijdragen komen van mensen die vanuit hun werk volop gewend zijn artikelen te schrijven: hoogleraren en andere medewerkers van universiteiten, het Freudenthal Instituut, van onderwijsondersteunende instituten zoals het APS, enzovoorts. Anderzijds wil je natuurlijk óók bijdragen die rechtstreeks 'uit het veld' komen, maar daar heb je vaak te maken met leraren die wél de ideeën maar niet de schrijfervaring hebben en die zich soms zó bescheiden opstellen dat je heel veel moeite moet doen om ze aan het schrijven te zetten.

Je bent er al weer een tijdje uit, sinds de zomer van 2008. Wat mis je?

Vooral de inhoudelijke correspondentie over artikelen, het nadenken over het betoog van een ander, m'n pogingen tot kritisch meedenken en het schrijven van commentaren. Als hoofdredacteur beoordeel je van een inzending eerst of je 'm in principe geschikt acht voor publicatie, al dan niet na bijstelling. Zo ja, dan noteer je voor jezelf je commentaar en stuur je het conceptartikel geanonimiseerd door naar een paar redacteuren en soms ook naar andere referenten. Vervolgens komen zij met allerlei op- en aanmerkingen; die zaken zette ik dan weer af tegen mijn eigen commentaar en verwerkte ik tot een hopelijk zinnig geheel voor de auteur zodat die een volgende versie kon gaan schrijven. Dat vond ik lastig maar boeiend en ook heel leerzaam om te doen, en dat mis ik wel.

En ik mis de mensen natuurlijk. De prettige samenwerking met de redactieleden en de andere *Euclides*-medewerkers, de contacten met auteurs.

Toen je stopte bij Euclides en weer alleen les gaf dacht je zeker 'Wat zal ik nu eens gaan doen?'

Nee, ha ha, zo was het echt niet. Ik had me streng voorgenomen: ik heb zeven jaar *Euclides* gedaan, dat was ontzettend leuk, maar ook heel erg tijdrovend, ik was eigenlijk voortdurend met *Euclides* bezig – het is daarom verstandig om nu even een jaar lang niks extra's naast m'n schoolwerk te doen en een beetje bij te komen; dan zien we daarna wel weer. En toen vroeg Gerard Koolstra me voor de *WiskundE-brief*.

Tsja, en dan kruipt het bloed toch waar het niet gaan kan, en bovendien was ik altijd al erg gecharmeerd van de *WiskundE-brief* als

nieuwsmedium. Ik ben uiteindelijk overstag gegaan omdat het beslist minder tijd zou gaan kosten dan *Euclides*. Ik dacht, het is toch eigenlijk wel heel leuk om op een min of meer journalistieke manier bezig te blijven, mensen te kunnen blijven informeren, en op die manier ook zelf stevig betrokken te blijven bij allerlei ontwikkelingen en discussies.
Bij de *WiskundE-brief* gaat het natuurlijk vooral om het kort weergeven van nieuws en reacties, en niet zozeer om het genereren en inhoudelijk becommentariëren en (laten) bijstellen van artikelen, wat ik juist bij *Euclides* zo mooi vond aan het werk. Maar aan de andere kant, we doen vanuit de *E-brief* ook regelmatig een oproep die interessante reacties en discussies uitlokt, waardoor die inhoud als vanzelf toch weer komt bovendrijven.

De ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs – hoe kijk je daar tegen aan?

De laatste decennia domineert het schoolboek ons onderwijs wel heel sterk, vind ik. Veel docenten laten zich grotendeels leiden door 'het boek' – eventueel te lezen als 'het *digitale* lesmateriaal'. Terwijl jij, als docent, natuurlijk bij uitstek degene bent die het onderwijs hoort vorm te geven. Hou het heft in handen! 'Het boek' kun je daar natuurlijk handig bij gebruiken, maar je moet je eigen inbreng, je eigen ambachtelijkheid en professionaliteit niet verwaarlozen.
Heel vervelend van het begin van de Tweede Fase vond ik bijvoorbeeld, dat de nadruk zo werd gelegd op zelfwerkzaamheid van de leerlingen – de 'studiehuisgedachte' werd wat mij betreft op die manier helemaal verkeerd uitgelegd. Zelfwerkzaamheid werd gezien als een invulling van het begrip 'zelfstandig leren', maar dat is echt iets heel anders. De boeken moesten zó geschreven worden dat de leerlingen er zonder docent doorheen konden. Dat klonk wel heel mooi maar dat was het niet. Alles in de opgaven moest voorgekauwd worden, hobbels moesten vooral vermeden worden. Hapklare brokken; brrr. De leerlingen werken de sommetjes vervolgens stuk voor stuk snel af, aan de hand van de studiewijzer – zonder de diepte in geduwd te worden, zonder gedwongen te worden tot bezinning op de leerstof, en dus zonder diepgaande verwerking. Je leert er maar weinig van.

Ik maak me ook zorgen over wiskunde C en D. Het zijn prachtige vakken, hoor, maar ik plaats er toch wat vraagtekens bij. En blijven ze overeind? Vier verschillende wiskundevakken, alleen al voor 't vwo – dat is nogal wat.
Met wiskunde D ben ik trouwens nooit echt gelukkig geweest. Dat vak is indertijd ingevoerd onder het motto dat het een belangrijke aanvulling voor bèta-gerichte leerlingen zou zijn, goed voor de exacte vervolgstudies, en dat geïnteresseerden daar leuk mee aan de slag konden. Nou, dat zie ik dus niet zo. Ten eerste biedt niet elke school het aan. Ten tweede, niet elke potentieel geschikte leerling kiest wiskunde D. De leerling heeft immers veel méér keus. Dan kunnen wij wiskundeleraren wel heel erg op de wiskunde gericht zijn, er bestaat ook nog zoiets als NLT of Informatica, of Biologie voor vwo-leerlingen die de deur naar allerlei medische wetenschappen willen openhouden. Het vak wiskunde D is door het ministerie ingevoerd als een doekje voor het bloeden, toen het 'heelvak' wiskunde B12 door OCW ingekrompen werd tot min of meer het toenmalige deelvak wiskunde B1, het huidige wiskunde B. Als je vindt dat onderdelen van wiskunde D belangrijk zijn voor bèta-studies en in het bijzonder voor de wiskundestudie, dan moeten die onderdelen niet in een facultatief, vrijblijvend vak als wiskunde D terecht komen. Die onderdelen zouden dan toch echt deel moeten uitmaken van het voor exacte richtingen verplichte wiskunde B. Dat gaat niet, op dit moment, en daar ligt dus een probleem.
Ik vind het in dit kader ook een beetje akelig dat je enerzijds een docent zicht biedt op alle prachtige mogelijkheden van wiskunde D, maar hem of haar anderzijds in de praktijk nogal eens opzadelt met allerlei organisatorische problemen: het gaat vaak om kleine groepen en dus leidt dat al snel tot combinatiegroepen, minder lesuren... Red je maar! Dan dreigt er van dat mooie vak weinig over te blijven. Maar misschien ben ik te somber.
Zo'n vak als wiskunde D heeft trouwens wél heel positieve effecten op de samenwerking tussen voortgezet en hoger onderwijs, althans met de universiteiten – want met het hbo wil het vooralsnog niet erg vlotten.
Ook wiskunde C heeft het in theorie in zich, denk ik, om een prachtig vak te worden, maar ook daar moet je goed kijken hoe haalbaar het is met die kleine aantallen leerlingen. Misschien stappen straks in vwo-6 nog heel wat A-leerlingen over naar C, even afwachten dus, maar voor wiskunde C blijft de doelgroep klein, vrees ik. Vóór de invoering van de Tweede Fase was er in het algemeen maar zo'n 5% van de vwo-leerlingen die géén wiskunde koos; naar mijn idee is die groep zo ongeveer de doelgroep voor wiskunde C.
Voor vmbo-leerlingen zijn de wiskundeprogramma's veel beter geworden dan pakweg 30 jaar geleden. Je moet wel kijken naar de aansluiting op de technische richtingen in het mbo; die laat te wensen over. Ook van vmbo-TL naar havo wiskunde B zit het niet lekker. Maar voor de rest… Wat ze leren is veel beter bruikbaar, ook in de maatschappij.
Dan heb je natuurlijk ook nog het mbo. Daar hoor je weinig over. In het mbo speelt de aansluitingskwestie voor de leerlingen die uit het vmbo komen, maar ook voor degenen die vanuit het mbo naar het hbo willen. Vooral in de technische richtingen zijn er problemen. Daarnaast: in veel mbo- en hbo-opleidingen wordt wiskunde niet meer als geïsoleerd vak aangeboden, maar geïntegreerd binnen andere vakken. Prima natuurlijk – maar vaak houdt dat in dat nieuwe stukjes wiskunde alleen aangeboden en geleerd worden op het moment dat je zo'n onderdeel nodig hebt binnen de gegeven praktijksituatie – de niet-wiskundige probleemstelling die de student op dát moment bestudeert – en niet meer in andere contexten, of verderop in de opleiding. Die wiskunde wordt dan alleen binnen de context ontwikkeld waarmee de studenten op dat moment bezig waren; 'just in time learning' heet dat. Als het daarbij blijft, leer je als student niet hoe je die kennis kunt toepassen in andere situaties. De hele transfer naar andere probleem stellingen verdwijnt dan achter de horizon. Dat vind ik griezelig.

Wat zijn je plannen voor de nabije toekomst?

Ik ben tijdens die hectische *Euclides*-jaren aan allerlei dingen niet goed toegekomen. Om maar eens wat te noemen, ik moet een stevige inhaalslag maken voor wat betreft ICT-gebruik in m'n lessen. Ik ben in ieder geval van plan te blijven lesgeven. Ik vind wiskunde een hartstikke leuk vak om te geven; daar heb ik veel plezier in. En de combinatie met m'n werk als schooldecaan bevalt me goed.
Daarnaast vind ik het plezierig om ook dingen rond het wiskundeonderwijs buiten de school te blijven doen: de *WiskundE-brief*, en misschien ook nog wel andere klussen op dit gebied.
Maar nogmaals, in het wiskundeonderwijs valt ook 'gewoon als leraar' nog zóveel te beleven!

Over de interviewer
Wim Laaper is redacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *wlaaper@iae.nl*

Werken aan reken-vaardigheid in het vmbo

[Kees Buijs]

Inleiding

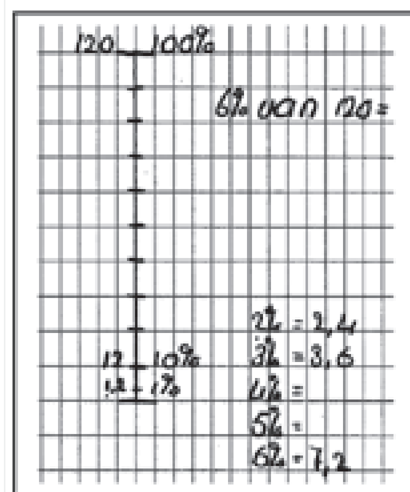
Op veel fronten staat de rekenvaardigheid van leerlingen ter discussie. Rapporten van de Onderwijsinspectie[1] en van de commissie Meijerink[2] geven aan dat er bij leerlingen in het basisonderwijs sprake is van een neerwaartse tendens in de leerresultaten bij rekenen/wiskunde. Ook bij leerlingen in het voortgezet onderwijs worden zorgelijke ontwikkelingen gesignaleerd. Het gaat daarbij niet alleen om problemen die te maken hebben met de overgang van het ene naar het andere schooltype, maar ook om problemen binnen een bepaald schooltype. Zo komen leerlingen in de basisberoepsgerichte leerweg van het vmbo de school veelal binnen met een gebrekkige rekenvaardigheid. In het leerplan van dit schooltype is echter structureel weinig ruimte om hier verbetering in aan te brengen, met als gevolg dat de rekenvaardigheid nog verder achteruit dreigt te gaan. Dat dit gevaar reëel is, bleek wel bij een door de SLO uitgevoerde enquête onder Rotterdamse vmbo-docenten. Over de hele linie bleken er klachten te zijn over vaardigheid in elementair hoofdrekenen, inzicht in ons getalsysteem, kennis van ons maatstelsel, en doordacht gebruik van de rekenmachine; ***zie figuur 1*** voor een voorbeeld van een vaak voorkomende foutieve oplossing.

figuur 1 Voorbeeld van een foutieve oplossing uit vmbo-1. Opgave: Je koopt een pak koffie van € 2,35 en betaalt met een tientje. Wat krijg je terug?

Naar aanleiding van al deze signalen rees dan ook de vraag in hoeverre het aanbeveling verdient om voor rekenen een structurele plaats in het leerplan van klas 1 en 2 van het vmbo in te ruimen. Om hierover meer aan de weet te komen is de SLO een project 'Verder met Rekenen' gestart waarin wordt onderzocht op welke wijze de rekenvaardigheid van vmbo-leerlingen, in het bijzonder binnen de basisberoepsgerichte leerweg, versterkt en uitgebouwd kan worden. In dit artikel gaan we nader op dit project in. Eerst wordt een korte toelichting gegeven op de opzet van het project, waarbij wordt stilgestaan bij enkele dilemma's die zich voordeden en keuzes die zijn gemaakt. Vervolgens wordt verslag gedaan van een les uit het experimentele onderwijsleertraject dat in het kader van het project ontwikkeld werd. Deze les vond enige maanden geleden plaats op een Amsterdamse vmbo-school. Ter afsluiting wordt een indicatie gegeven van de voorlopige resultaten van het project.

Opzet van het project 'Verder met Rekenen'

Om na te kunnen gaan op welke wijze de rekenvaardigheid van instromende vmbo-leerlingen versterkt kan worden, werd door de SLO een experimenteel onderwijsleertraject ontwikkeld voor klas 1, met name bedoeld voor de basisberoepsgerichte leerweg. Drie leerstofdomeinen werden geselecteerd om intensief aandacht aan te besteden: (a) geldrekenen en ons geldsysteem, (b) procenten en verhoudingen, (c) meten en ons maatstelsel. In de didactische uitwerking van deze domeinen werd onder meer voortgebouwd op de ervaringen die in een eerder stadium werden opgedaan bij de ontwikkeling van een aangepast leertraject bestemd voor zwakkere leerlingen in groep 7 en 8 van het basisonderwijs[3]. Bij dit eerdere ontwikkelwerk werd onder meer geconstateerd dat een van de problemen die zich in de basisschool voordoen, gelegen is in het feit dat er binnen de verschillende leergangen in de bovenbouw (zoals bij breuken, procenten en kommagetallen) veelal sprake is van een tamelijk snel voortschrijdend abstraheringsproces in de richting van formele structuren en procedures. Bij het uitproberen van het aangepaste leertraject bleek dat als leerlingen ruimere gelegenheid krijgen om op een informeel niveau bezig te zijn, gebruikmakend van passende schema's en modellen zoals getallenlijn, strook en maatlijn, dit een zeer positief effect op hun rekenvaardigheid kan hebben (***zie figuur 2*** voor een 'modelondersteunde' oplossing). Naar aanleiding van deze ervaringen werd in het vmbo-project dan ook voor een soortgelijke didactische benadering[4] gekozen.



figuur 2 Voorbeeld van een modelondersteunde oplossing uit groep 7/8. Opgave: Reken uit hoeveel 6% van € 120,00 is.

Bij de leerstofkeuze deed zich in het basisschoolproject verder een dilemma voor dat thans in het vmbo-project eveneens actueel is. De niveauverschillen tussen veel leerlingen bleken namelijk in groep 7 al behoorlijk groot te zijn. Zo waren er grote verschillen in basiskennis zoals met betrekking tot het rekenen tot 100, de tafels van vermenigvuldiging en getalbegrip tot 1000. Diende het oefenen van deze basiskennis ook een centrale plaats in het traject te krijgen? In principe zijn er duidelijke argumenten om dit inderdaad te doen. Immers, als een leerling bijvoorbeeld nog te kampen heeft met een gebrek aan parate kennis van tafelopgaven zoals 6 × 7 en 7 × 8, dan wordt het oplossen van opgaven

die daarop voortbouwen (zoals bij verhoudingen en procenten), al gauw bemoeilijkt.
Er is echter ook een belangrijk bezwaar: veel van de leerlingen uit de doelgroep (in Cito-termen: de D- en E-leerlingen volgens de normen van het leerlingvolgsysteem) zijn in hun schoolloopbaan al zo frequent geconfronteerd met lacunes in deze basiskennis, dat het tamelijk ontmoedigend kan zijn om daar in groep 7 en 8 wederom intensief mee aan de slag te moeten gaan. Bovendien is het van het belang in deze periode in ieder geval te investeren in een gedegen begripsmatige basis voor concepten als breuk, kommagetal en percentage, en de samenhang daartussen. Als je van zulke concepten bij binnenkomst in het v(mb)o weinig begrijpt (zo was al uit de Rotterdamse vmbo-enquête gebleken), dan heb je als leerling direct een probleem. Op grond van deze overwegingen werd dan ook besloten om basiskennis en -vaardigheden wel aan de orde te stellen, maar zonder deze al te sterk te laten domineren; en dan vooral ook *en passant*, namelijk voor zover ze een rol spelen bij de verkenning van de genoemde leerstof rond procenten, kommagetallen en breuken. Gezien het feit dat de aanpak voor het aangepaste leertraject voor groep 7/8 in de praktijk behoorlijk succesvol bleek, werd in het kader van 'Verder met Rekenen' voor een soortgelijke aanpak gekozen.
Bij de eerste voorbereidingen van het project bleek al gauw dat er nogal wat vmbo-scholen zijn waar de problematiek van de gebrekkige rekenvaardigheid van leerlingen hoog op de agenda staat. Het kostte dan ook weinig moeite om een viertal scholen te vinden die aan het project wilden deelnemen. De opzet werd daarbij zo gekozen dat op elk van de deelnemende scholen ongeveer de helft van het aantal bb-klassen aan het experimentele leertraject deelnam, terwijl de andere helft van de klassen als controlegroep fungeerde.[5]
Voor de duur van het traject (een half jaar) kregen de leerlingen twee keer per week een les van drie kwartier 'voortgezet rekenen'. Aan het begin, halverwege en aan het eind van het traject werd een criteriumtoets afgenomen om de beginsituatie te bepalen en om na te gaan in hoeverre zich progressie voordeed. Vier maanden na afloop van het traject werd bovendien nog een nameting gehouden om na te gaan in hoeverre de nieuw verworven kennis beklijfde. Bij het analyseren van de resultaten van het traject wordt samengewerkt met de Universiteit Leiden waar analyses worden uitgevoerd om de ontwikkeling van de leerlingen in de experimentele groep te vergelijken met die in de controlegroep. Op basis van deze analyses (waarover meer in de afsluitende paragraaf van dit artikel) wordt het experimentele traject in een verbeterde versie het komende schooljaar op een groter aantal scholen uitgevoerd.
Om een indruk te krijgen van de gang van zaken tijdens de lessen van het traject volgt hieronder nu eerst een beschrijving van een les rond een verhoudingsprobleem.
De les vond plaats in een bb-klas op een vmbo-school in Amsterdam.[6] De les werd gegeven door docent mevrouw Lisa Pereira en vond plaats op een moment dat het grootste deel van de lessen rond geld afgerond waren, terwijl de lessen rond procenten en meten nog moesten plaatsvinden.

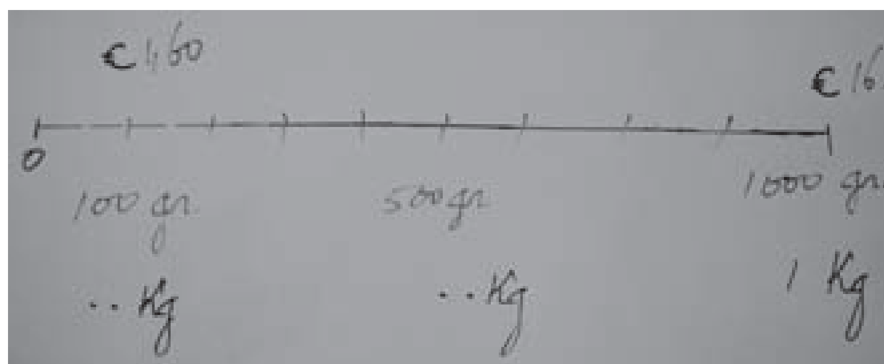


figuur 3 Het kaasprobleem dat centraal in de les staat

Voorbeeld van een les: het kaasprobleem

Inleiding: verkenning van het probleem
Lisa legt het kaasprobleem (***zie figuur 3***; wat kost een stuk van 350 g kaas bij een kiloprijs van 16 euro?) aan de leerlingen voor, en vraagt om een manier te bedenken om dit aan te pakken.

Ze voegt eraan toe: probeer eerst eens te schatten wat het ongeveer kost. Op het bord staat overigens al een maatlijn met gewichtmaten van 0 tot 1000 gram eronder. Na enkele minuten krijgt een leerling het woord die meteen verwijst naar deze getallenlijn, en aangeeft dat je die kunt gebruiken. Hij meldt: 'Dan zet je boven de lijn bij 1 kilo het bedrag van 16 euro; en dan maak je 10 streepjes en dan heb je 100 gram, dat is € 1,60.' Lisa noteert de bedragen bij de lijn (***zie figuur 4***), maar vraagt ook hoe de leerling aan € 1,60 komt. 'Nou', is het antwoord, 'Als je 10 keer 1,60 doet, heb je weer die 16 euro'.



figuur 4 De (dubbele) getallenlijn op het bord

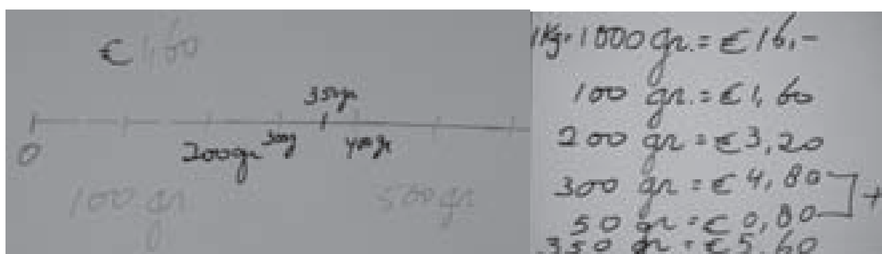


figuur 5 Het schatten en wegen van de avocado tijdens de weegoefening

Lisa noteert dit apart op het bord, en geeft aan dat dit best wel eens een goede oplossing zou kunnen zijn, maar dat ze nog even andere leerlingen wil horen. Een andere leerling krijgt het woord. Zij meldt dat ze is uitgegaan van die 16 euro voor een hele kilo, en vervolgens door 10 heeft gedeeld. ‘Want dan krijg je 100 gram, en dat is € 1,60. En dan ga je naar 200 gram en naar 300 gram, en dan nog die 50 gram’. ‘Dit zou ook wel eens een goede oplossing kunnen zijn’, aldus Lisa. Maar ze ziet dat er in de klas nogal wat leerlingen lijken te zijn voor wie dit nog moeilijk te vatten is. Daarom vraagt ze eerst nog naar andere manieren, ‘meer schattend’. Eerst is er nu een leerling die meldt dat hij niet goed wist hoeveel gram er in 1 kilogram zit. Nadat dit is besproken, komt een vierde leerling aan het woord, die geschat heeft. Zij redeneert: ‘1 kg is 16 euro, dus 500 gram is dan de helft, dus 8 euro; en 250 gram nog een keer de helft, dus 4 euro. Dan moet het ongeveer 5 euro zijn.’ Lisa (verduidelijkend): ‘Dus jij zegt: 250 gram kost 4 euro, en 350 gram is wat meer, dus zeg maar 5 euro?’ (Lisa noteert deze redenering op het bord.) Andere leerlingen: ‘Ja, zo had ik ook gedacht.’

Wegen op de weegschaal

Voordat het probleem nu verder wordt aangepakt, last Lisa een intermezzo in waarin een korte weegoefening wordt gedaan. Voor de klas staat een keukenweegschaal met een aantal vruchten en een pak zout erbij. Eerst wordt gezamenlijk bekeken wat er op de schaalverdeling van de weegschaal is te zien, waarbij de streepjes van 100 gram en de kilogramaanduiding ter sprake komen. Vervolgens mogen enkele leerlingen op de hand schatten hoe zwaar de mango is. De schattingen variëren van 400 tot 600 gram. Dan mag een leerling het precieze gewicht bepalen, en dit leidt tot de vaststelling dat de mango 480 gram weegt. Waarbij blijkt dat het goed aflezen van zo’n schaalverdeling nog niet zo eenvoudig is. De wijzer staat iets voorbij de 400, maar hoe ver is dat nu? Pas nadat bepaald is dat het nog voorbij het streepje midden tussen 400 en 500 is, komt vast te staan dat het ongeveer 480 gram moet zijn. Aansluitend wordt hetzelfde gedaan voor een avocado (210 gram; schattingen tussen 150 en 350 gram), en voor het pak zout (velen houden het op 600 tot 700 gram; blijkt dus 1 kg te zijn). Bij dit laatste wordt nog vastgesteld dat de verpakking ook wat weegt en dat 1 kg en 40 gram dus wel klopt; ***zie figuur 5*** voor het schatten en wegen van de avocado.

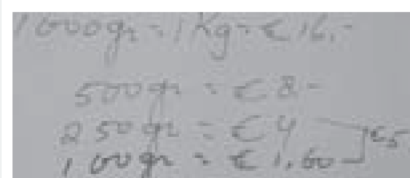


figuur 6 De oplossing via 100 gram stapsgewijs op het bord genoteerd, met de getallenlijn als ondersteunend model

Terug naar het kaasprobleem; precieze oplossingen

Na dit intermezzo keert Lisa terug naar precieze oplossingen voor het kaasprobleem. Ze haakt daarbij in op de stappen die al op het bord staan. Gezamenlijk wordt eerst vastgesteld waar op de getallenlijn 350 gram zit, en dat je dit kunt zien als 100+100+100+50 gram. Vervolgens wordt geconstateerd dat de prijs van 100 gram al is bepaald: € 1,60. En daarna gaat het stapsgewijs naar 350 gram toe: eerst 200 gram, dan 300, en dan nog 50 gram erbij. Deze laatste stap is voor sommige leerlingen nog niet zo eenvoudig, je moet daar immers eerst nog de prijs van 100 gram voor halveren. Zo wordt uiteindelijk de precieze prijs bepaald: € 5,60 (***zie figuur 6***).

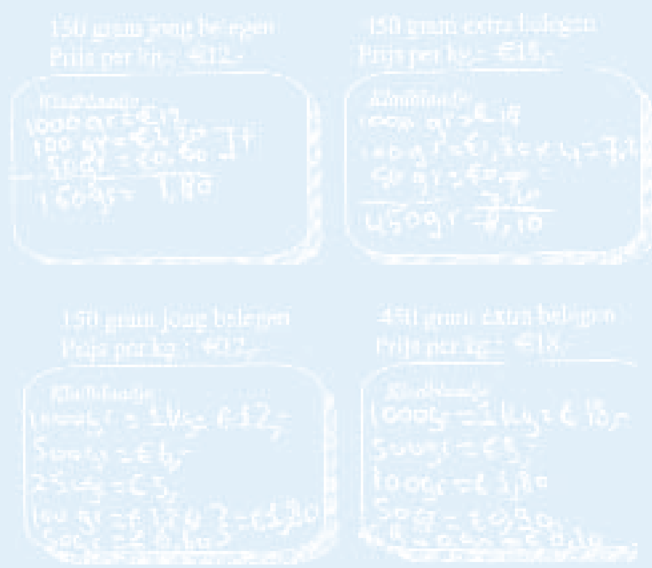
Er blijken echter nog alternatieven. Yasmine meldt dat ze op haar kladblaadje eerst de helft en daar weer de helft van had bepaald, dus 250 gram is 4 euro. En dan nog eens 100 gram via delen door 10, dat is € 1,60. ‘En moet je 250 gram en 100 gram nog optellen’, aldus Yasmine (***zie figuur 7***). Een prachtige oplossing die echter voor sommige leerlingen toch minder toegankelijk lijkt dan de werkwijze waarbij uitgegaan wordt van 100 gram als een soort van ankerpunt.[7]



figuur 7 De alternatieve oplossing van Yasmine op het bord genoteerd

Verwerking

Na deze instructie gaat iedereen aan de slag met enkele soortgelijke verhoudingsopgaven rond het kopen van kaas. Verreweg de meeste leerlingen lijken redelijk goed uit de voeten te kunnen, veelal gebruikmakend van de basisstrategie waarbij via 100 gram wordt geredeneerd. Sommige leerlingen tekenen een getallenlijn ter ondersteuning van hun redenering, anderen beperken zich tot het noteren van tussenstappen; ***zie figuur 8 (pagina 284)*** voor twee voorbeelden van dit laatste.



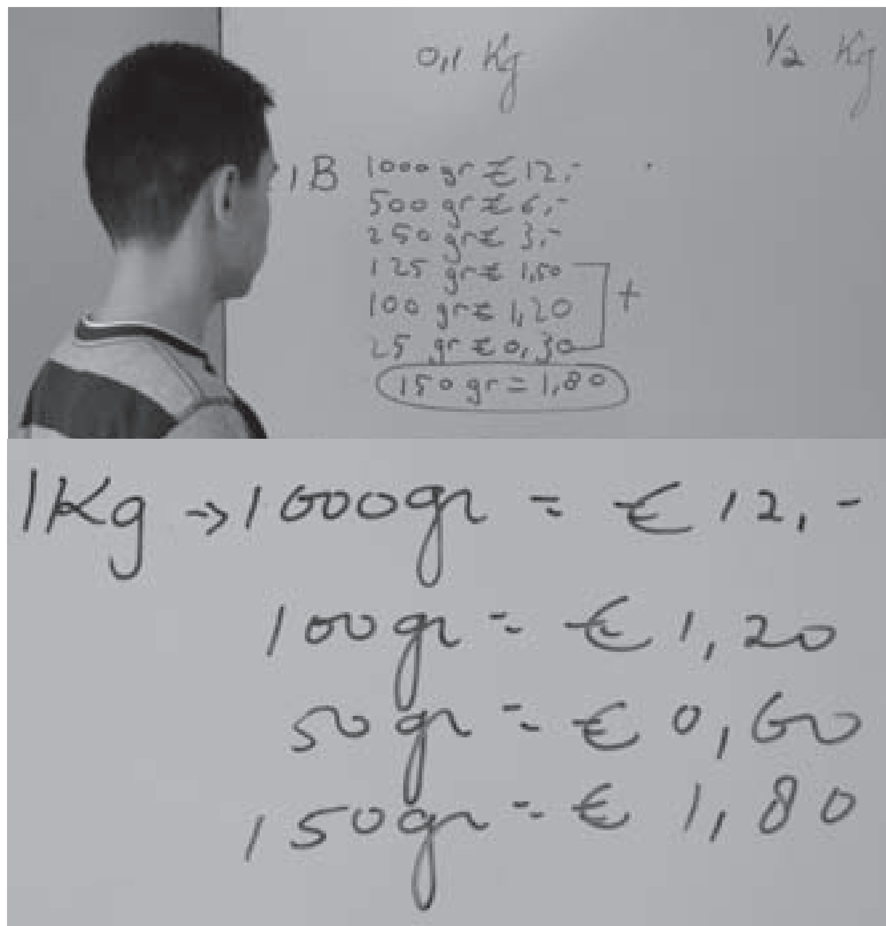
figuur 8 De oplossingen van twee leerlingen bij vergelijkbare verhoudingsproblemen tijdens de verwerking

Nabespreking
Tijdens het laatste deel van de verwerking heeft Lisa één leerling (Halil) gevraagd om zijn berekening bij de eerste opgave (de prijs van 150 g kaas bij een kiloprijs van € 12,00) alvast op het bord te zetten; zie de bovenste foto ***in figuur 9***. In de nabespreking verduidelijkt Halil wat hij heeft gedaan. Iedereen volgt dit aandachtig. Men is het erover eens dat dit een goede strategie is, maar wel omslachtig! Anderen hebben het eenvoudiger gedaan. Rajae licht toe hoe ze eerst 100 gram heeft uitgerekend (delen door 10, dus komma één plaats naar links), dat is € 1,20. En dan 50 gram, is de helft dus 60 cent; en tenslotte nog die € 1,20 en € 0,60 bij elkaar optellen: € 1,80. Veel leerlingen zijn het erover eens dat dit een makkelijke manier is.

Als uitsmijter van de les wordt de meloen nog even gewogen. Eerst maken een aantal leerlingen een schatting 'op de hand' (met veel schattingen van rond de 600 of 700 gram), daarna gaat de meloen echt op de weegschaal. Het werkelijke gewicht blijkt 1 kg en 100 gram te zijn!

Voorlopige resultaten van het experimentele traject
Zoals in de andere lessen uit het experimentele traject ook wel gebeurt, doen zich in de hierboven beschreven les enkele onverwachte gebeurtenissen voor. Zo komen, anders dan verwacht, enkele leerlingen bij de verkenning van het kaasprobleem direct met een precieze oplossing. Mede door haar inschatting dat deze oplossingen in eerste instantie wellicht nog 'een brug te ver' zijn voor sommige leerlingen, koos de docent ervoor om deze oplossingen voorlopig slechts in eerste aanzet aan de orde te stellen en om de aandacht daarna te richten op (eenvoudiger geachte) schatstrategieën. Na het intermezzo van het wegen, bedoeld om de kennis van dit deel van ons maatsysteem op te frissen, greep zij vervolgens terug op de eerder aangedragen precieze strategieën. Het redeneren via 100 gram (als tiende deel van een kilogram) kwam daarbij als een basisstrategie naar voren die in de verwerking voor veel leerlingen goed bruikbaar bleek te zijn.
Men kan zich afvragen of de weeg activiteit in het intermezzo van de les wel zo op z'n plaats is. Gaat het hier niet om leerstof die eigenlijk meer in groep 5 of 6 van de basisschool thuishoort? In principe is dat natuurlijk zo. Maar de ervaring in voorafgaande lessen van het experimentele traject heeft geleerd dat de maatkennis van veel leerlingen sterk te wensen overlaat. Wellicht hebben zij ooit wel eens iets aan grammen en kilogrammen gedaan, maar deze kennis is veelal weggezakt. En eigen praktische meetervaringen zoals met een keukenweegschaal ontbreken vaak totaal. De relaties tussen de betreffende maateenheden zijn dan ook vaak nauwelijks tot leven gekomen, en een reeks korte *en passant*-activiteiten gericht op het opfrissen en consolideren van deze kennis kan bijzonder nuttig zijn.
Tot slot iets over de resultaten van het experimentele traject. Bij het analyseren daarvan aan de hand van de drie afgenomen toetsen wordt in principe naar drie aspecten van de reken/wiskundige kennis van leerlingen gekeken: goedscores, strategiegebruik en notatiegedrag. Met betrekking tot de laatste twee punten zijn op dit moment nog geen nauwkeurige gegevens bekend. Wel bestaat de indruk dat de leerlingen met name op het punt van notatiegedrag een positieve ontwikkeling hebben doorgemaakt. Veel leerlingen (zo bleek ook al uit de Rotterdamse vmbo-enquête) zijn in groep 7 en 8 nooit goed vertrouwd geraakt met het overzichtelijk en helder noteren van hun berekeningen bij het maken van rekenopgaven.[8] Tijdens het experimentele traject is bij herhaling gebleken dat er op dit punt een omschakeling dient plaats te vinden waaraan in de klas nadrukkelijk aandacht geschonken moet worden. Als leerlingen zich eenmaal bewust zijn geworden van het belang hiervan, dan lijkt het of hun reken/wiskundige ontwikkeling ook vlotter verloopt. Voor de drie centrale leerstofgebieden geld, procenten en meten zijn verder wel gegevens over de resultaten in de vmbo-school in Amsterdam bekend. ***In figuur 10*** zijn deze als totaalscore grafisch weergegeven.[9]

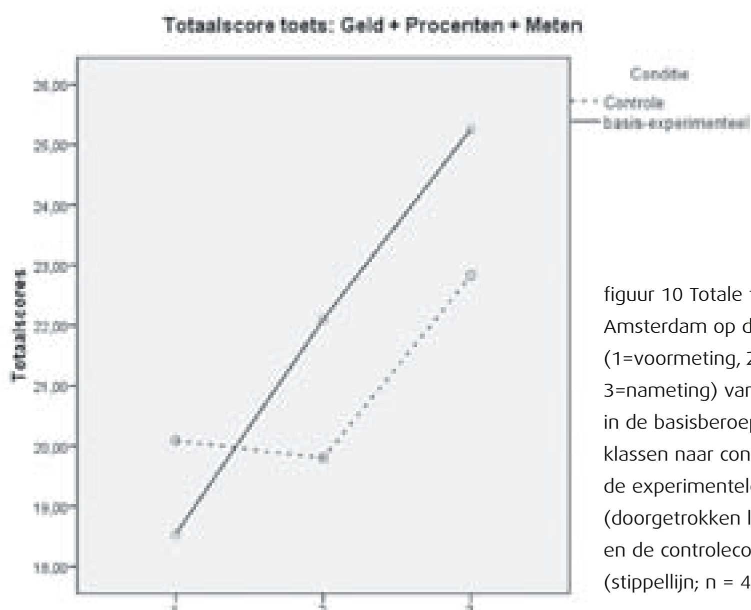
Duidelijk is te zien dat het beginniveau van de leerlingen in de experimentele groep iets onder dat van de controlegroep ligt. In het eerste deel van het traject (tussen meting 1 en 2) doet zich dan bij de experimentele groep een duidelijke stijging in de resultaten voor, terwijl bij de controlegroep een lichte daling optreedt. In het tweede deel van het traject (tussen meting 2 en 3) is er vervolgens sprake van een substantiële verdere stijging in de experimentele groep terwijl zich in de controlegroep een vergelijkbare stijging voordoet. Wat de oorzaak van de laatstgenoemde stijging is, wordt momenteel nog onderzocht.
Samengevat kan gesteld worden dat het experimentele traject een redelijk positieve invloed op de rekenvaardigheid van de leerlingen lijkt te hebben. En voor het project als geheel lijkt de (voorlopige) conclusie gerechtvaardigd dat een onderwijsleertraject 'voortgezet rekenen' wel degelijk een belangrijke verbetering in de rekenvaardigheid van vmbo-leerlingen teweeg kan brengen – een vaardigheid die deze leerlingen in het vervolg van hun schoolloopbaan maar ook buiten school maar al te goed kunnen gebruiken.



figuur 9 Boven de oplossing van Halil en onder die van Rajae bij de opgave rond de prijs van 150 gram kaas

Dank
Met dank aan docenten en leerlingen van het 'Calvijn met Junior College' voor hun bereidwillige medewerking, in het bijzonder docent Lisa Pereira.

Oproep
Voor de tweede pilot van het hierboven beschreven project 'Verder met Rekenen' is er nog behoefte aan enkele vmbo-scholen die met de eerste klassen (vooral bb-richting) willen deelnemen.
Aanmelden bij Kees Buijs: *c.buys@slo.nl*



figuur 10 Totale toetsscore van Amsterdam op drie tijdstippen (1=voormeting, 2=tussenmeting, 3=nameting) van 84 leerlingen in de basisberoepsgerichte klassen naar conditie: de experimentele conditie (doorgetrokken lijn; n = 43) en de controleconditie (stippellijn; n = 41)

Noten

[1] Inspectie (2008): *Basisvaardigheden rekenen-wiskunde in het basisonderwijs*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs (*www.onderwijsinspectie.nl*).

[2] Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008): *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: SLO (drie rapporten).

[3] Het materiaal van dit project is te downloaden van de SLO-website. Zie *www.slo.nl/primair/leergebieden/rekenen/* (kies in het menu: Hulpprogramma rekenen).

[4] Deze benadering is uitvoerig beschreven in de SLO-publicatie *Aandachtsgebieden voor een doorgaande lijn voor rekenen-wiskunde van po naar vmbo*. Deze publicatie is ook te vinden op de bij [3] genoemde website.

[5] Deze opzet werd ontwikkeld in samenwerking met dr. Kees van Putten (Faculteit Sociale Wetenschappen van de Universiteit Leiden).

[6] Dit betreft het 'Calvijn met Junior College' in Amsterdam-Slotervaart. Behalve de genoemde docent mw. L. Pereira levert ook docent mw. I. Klinkenberg als coördinator van het project een belangrijke bijdrage.

[7] De foto's bij dit artikel zijn tijdens de les genomen. Soms is het bij de bordfoto's niet helemaal gelukt om alles goed vast te leggen. Zo ontbreekt rechts op de foto van figuur 7 de '60' van € 5,60.

[8] Zie in dit verband ook de publicatie *Hoe rekent Nederland?* van M. van de Heuvel-Panhuizen (2009; Utrecht: Freudenthal Instituut).

[9] Met dank aan Karin Visser, studente psychologie aan de Universiteit Leiden, en haar docent Kees van Putten die de gegevens van de Amsterdamse leerlingen analyseerden.

Over de auteur
Kees Buijs is als leerplanontwikkelaar werkzaam voor de SLO te Enschede.
E-mailadres: *c.buys@slo.nl*

Een nieuwe wiskundemethode voor het gymnasium?

[Bart Zevenhek en Nora Blom]

De afgelopen zes jaar heeft de wiskundesectie van het Amsterdamse Barlaeusgymnasium aan een eigen methode voor de onderbouw gewerkt. Dat heeft, tot nu toe, geresulteerd in een boek voor de eerste klas (zie figuur 1) en los materiaal voor de tweede en derde klassen. Als neveneffect heeft het de wiskundesectie, een verzameling eigengereide individuen met uiteenlopende opvattingen, nader tot elkaar gebracht. Het eersteklas boek is vrij beschikbaar op het internet[1]. In dit artikel willen wij iets over de achtergronden van onze methode en over het ontwikkelingsproces vertellen.

Uitgangspunten

De keuze voor het ontwikkelen van eigen materiaal kwam in eerste instantie voort uit onvrede met de basisvorming, het studiehuis, het realistisch wiskundeonderwijs, te veel gebruik van de rekenmachine (en computer) en met het winstbejag van uitgevers. We waren op zoek naar materiaal dat aansloot bij belangstelling en niveau van de gemiddelde gymnasiumleerling, met nadruk op de ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden en het abstracte denken. De boeken die toentertijd in gebruik waren, richtten zich op gemengde brugklassen. Hoe nobel het streven naar gemengde brugklassen ook is, op een gymnasium zitten uitsluitend leerlingen met vwo-niveau en voor hen waren de boeken veel te eenvoudig. Ruim voor het einde van het schooljaar waren we al door beide brugklasdelen heen.

Onze school heeft zich van meet af aan verzet tegen basisvorming en studiehuis. Een gymnasiumleerling moet voldoende intellectuele bagage mee krijgen en het denken moet optimaal gestimuleerd worden. Dit doel wordt het beste bereikt door een geïnspireerde docent met een centrale rol in de klas. Het lesmateriaal moet bij deze visie aansluiten. Afgezien van de praktische problemen die altijd een rol spelen bij de inzet van computers, vinden wij dat het individueel studeren 'aan de hand van' de computer geen goede methode is. De computer kan een enkele keer ingezet worden, ter illustratie, voor een aardig lesje met wiskunde-'applets', als ondersteuning voor een leerling met grote achterstand, of om bijvoorbeeld het gebruik van een spreadsheet aan te leren. Computergebruik hoeft echter geen vaste plaats te hebben in het lesmateriaal.

In de bestaande boeken worden te pas en te onpas contexten uit het dagelijks leven gebruikt. Alhoewel een goede context een mooie illustratie op kan leveren, zien wij (in de onderbouw) bij het aanleren van een nieuwe wiskundige vaardigheid nauwelijks een rol weggelegd voor dergelijke contexten. Wij vinden dat er ruimte moet zijn voor de docent om de uitleg te illustreren met concrete materialen, voorbeelden en/of verhalen, rekening houdende met de leerlingen. Natuurlijk is dit ook afhankelijk van de kennis en het enthousiasme voor een bepaald toepassingsgebied van de docent zelf. Wat wel een plaats heeft gekregen in ons boek, zijn historische en wiskundige contexten of (denk)modellen, zoals bijvoorbeeld de drie klassieke constructieproblemen, de getallenlijn, het oppervlaktemodel bij haakjes wegwerken.

Toen wij begonnen met de ontwikkeling van onze methode, kon onze houding makkelijk als conservatief aangeduid worden: terug naar die goede oude tijd toen wiskunde nog op degelijke wijze aangeleerd werd. Inmiddels is het tij echter aan het keren. De commerciële uitgevers geven weer vwo-boeken voor de onderbouw uit en schermen met hun nadruk op algebraïsche vaardigheden. Ongetwijfeld zal hier sprake zijn van een golfbeweging in de visie op wiskundedidactiek. Wij proberen onze eigen visie gestalte te geven.

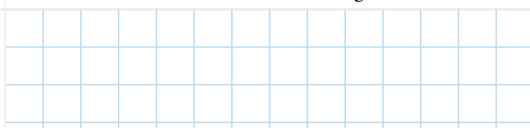


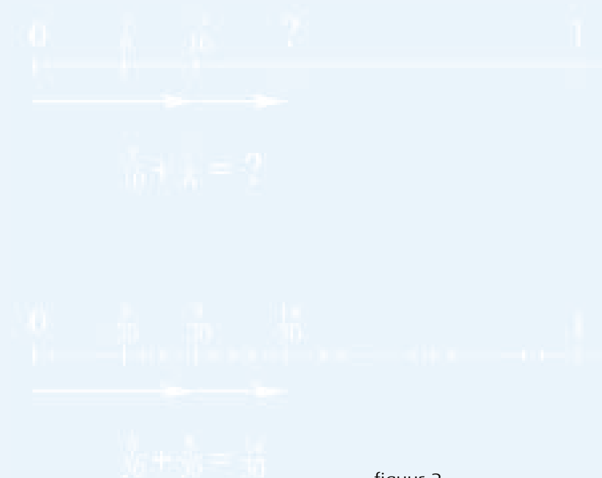
figuur 1

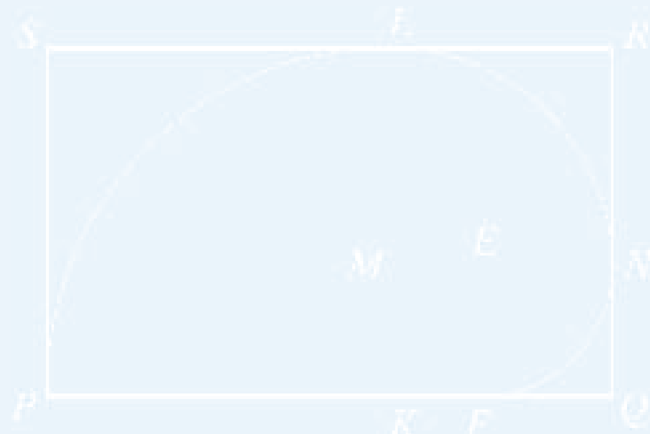
Inhoud

Het boek voor de eerste klas begint met een hoofdstuk over getallen. Bij rekentoetsen die wij in het begin van het schooljaar bij eersteklassers afnemen, blijkt steeds weer hoe ongelooflijk slecht leerlingen vooral met breuken kunnen rekenen. De rekenregels moeten beheerst worden om met kans op succes algebra aan te leren en iemand met een gymnasiumdiploma moet kunnen rekenen, vinden wij. De rekenmachine speelt in de tweede en derde klas een bescheiden rol; daarvóór moeten leerlingen alle berekeningen zonder rekenmachine kunnen uitvoeren.

Om te laten zien dat ons decimale positiestelsel geenszins vanzelfsprekend is, worden onder andere Romeinse cijfers en binaire getallen behandeld en wordt er mee gerekend. De getallenlijn wordt als denkmodel gebruikt en is de basis voor de introductie van negatieve getallen en de bewerkingen hiermee. Ook de regels voor het rekenen met breuken worden toegelicht



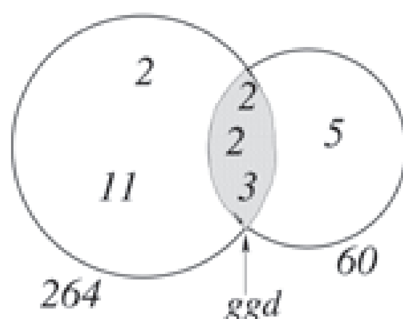

figuur 2


figuur 5

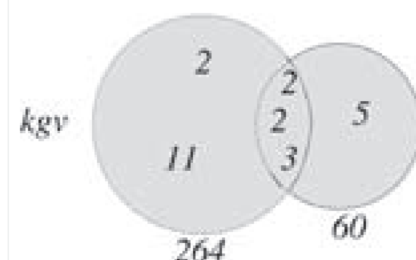
met hulp van de getallenlijn (***zie figuur 2***; blz. 29[2]). Er volgen vele opgaven over het rekenen met breuken, negatieve getallen, haakjes en machten. Staartdelingen vinden een natuurlijke plaats bij decimale breuken en het bepalen van de periode daarvan. Het hoofdstuk eindigt met getaltheorie en een serie opgaven uit de kangoeroewedstrijden. Priemgetallen, ontbinding in priemfactoren, ggd en kgv (***zie figuur 3*** en ***figuur 4***; blz. 57 en blz. 58[2]), maar ook bijvoorbeeld volmaakte getallen komen hier aan bod. Omdat wij denken dat het wiskundig denkvermogen met kangoeroeopgaven wordt ontwikkeld, hebben wij veel van deze opgaven opgenomen in onze methode. Deelname aan de wiskundewedstrijden wordt hiermede tevens gestimuleerd.
Er volgt een hoofdstuk over passer- en liniaalconstructies. In een apart schrift, dat we ook op netheid beoordelen, wordt in het spoor van de oude Grieken elementaire meetkunde beoefend. Geen axiomatiek en bewijzen, dat komt in een hogere klas, wel heel veel tekenen. Naast de basisconstructies van loodlijnen, bissectrices e.d. wordt de constructie van de guldensnede behandeld, met als toepassingen de regelmatige vijf- en tienhoek en de guldensnede-spiraal (***zie figuur 5***; blz. 90[2]).
Een afsluitende paragraaf over pseudoconstructies behandelt de drie klassieke problemen en alternatieve constructiemethoden, zowel in de uitbreiding, glijliniaalconstructies, als in de beperking, constructies met passer *zonder* liniaal. De laatste opdracht gaat over een pseudoconstructie van de zevenhoek.
In een later meetkundehoofdstuk wordt ingegaan op het gebruik van de geodriehoek en berekeningen van hoeken en oppervlakten. Er wordt ook hier nog geen poging ondernomen om tot bewijzen te komen, maar de weg daarheen wordt wel voorbereid. Overigens zal de docent vast niet de verleiding kunnen weerstaan om klassikaal te laten zien waarom de som van de hoeken van een driehoek altijd 180° is en uit te weiden over niet-euclidische meetkunde… Het begrip symmetrie komt in dit hoofdstuk eveneens aan bod. Dit hoofdstuk over meten en berekenen wordt weer afgesloten met een grote verzameling kangoeroeopgaven.
In twee algebrahoofdstukken worden formules geïntroduceerd en bewerkt, machten en quotiënten herleid en haakjes weggewerkt. Leerlingen vinden het meestal fijn om rijen algebraopgaven te maken; er ontstaat dan een heerlijke rust in de klas! De algebra vindt een toepassing in rekentrucs, getallenraadsels en bijvoorbeeld de negenproef. Met hulp van algebra kan je deze bedenken en verklaren. Merkwaardige producten worden opeens handige gereedschappen. Tenslotte is er een hoofdstuk over het assenstelsel, waarin een begin gemaakt wordt met het tekenen van grafieken. Al deze hoofdstukken worden eveneens afgesloten met kangoeroeopgaven.

Vormgeving

De prijzen van de reguliere lesboeken stijgen voortdurend. Dit wordt gerechtvaardigd door een mooie – in onze ogen schreeuwerige – vormgeving en vele extra's zoals computerparagrafen, handleidingen, werkboeken. Om de paar jaar verschijnen nieuwe edities. Een mooie manier om de verkoopcijfers en de winstresultaten op peil te houden. Wij zijn blij dat we deze ontwikkeling kunnen doorkruisen en onze leerlingen voor ongeveer 15 euro een boek kunnen aanbieden.
In de wereld van de universitaire wiskunde worden documenten gemaakt en opgemaakt in TeX. De meest ingewikkelde algebraïsche constructies zijn met dit tekstopmaaksysteem fraai weer te geven en de teksten die in TeX worden opgemaakt zien er bijzonder goed uit. Zeker als je 'Word for Windows' gewend bent, werkt het in het begin omslachtig. Er was dan ook aanvankelijk wat aarzeling om ons boek in TeX te schrijven, maar nu het boek af is zijn we erg blij met het professioneel ogende resultaat. Met het hulpprogramma LyX, een op TeX gebaseerde tekstverwerker, valt goed te werken en nu we met het tweedeklas boek bezig zijn leveren de auteurs zonder problemen direct TeX documenten af. Het stimuleert erg wanneer een hoofdstuk, waar je aan werkt, er onmiddellijk perfect uitziet. Het aardige van TeX en LyX is dat deze programma's, net als ons boek, vrij verkrijgbaar zijn op het web. De toekomst is aan de 'open source' programmatuur en schoolboeken!



figuur 3



figuur 4

Proces

De schoolleiding behoort ervoor te zorgen dat aan de randvoorwaarden voor goed onderwijs voldaan wordt en stimuleert docenten tot degelijk en creatief onderwijs, maar bemoeit zich niet inhoudelijk met de didactiek en pedagogiek: daarin zijn de docenten de professionals. Onze vorige rector Koen Kool, een manager *pur sang*, was deze mening toegedaan. Toen onze sectie hem benaderde met het idee van een eigen onderbouwmethode, stond hij hier dan ook meteen achter. Wij dachten dat ons project alleen kans van slagen had, als alle sectieleden meewerkten en kregen er uiteindelijk ieder één taakuur of te wel 40 klokuren per jaar voor. Voor het omzetten van de vaak met de hand geschreven teksten naar een TeX-document werd een wiskundestudent ingehuurd. De huidige rector ondersteunt de verdere ontwikkeling van onze onderbouwmethode, zij het met enige reserve.

Een van de docenten heeft het coördinatiewerk en de eindredactie op zich genomen en een andere docent heeft zich –naast het schrijven – met de vormgeving beziggehouden. De overige docenten schreven alleen of in tweetallen aan de hoofdstukken. Regelmatig waren er samenkomsten om de inhoud te bespreken. We becommentarieerden elkaars werk. De voortgang verliep niet altijd even soepel. De vergaderingen waren zeer inspirerend, maar er zijn meerdere jaren nodig geweest om tot het huidige resultaat te komen. De eerste twee jaren werd in de klas naast de reguliere boeken gewerkt met losse hoofdstukken. Daarna ging de reguliere methode de deur uit en na nog eens twee jaar werden de losse katernen vervangen door een boek.

Aan het eind van het schooljaar worden de gevonden fouten verbeterd voor de uitgave van het volgend jaar.

Een zeer positief neveneffect van het ontwikkelen van het materiaal is dat onze sectieleden ‘ideologisch’ dichter bij elkaar gekomen zijn. Zoals gezegd bestaat onze sectie uit een aantal eigengereide individuen met verschillende opvattingen. De bovengenoemde uitgangspunten voor onze methode worden dan ook zeker niet door alle leden van onze sectie in gelijke mate gedeeld! Door het werk aan onze methode hebben we geleerd onze opvattingen bewust te worden, te uiten en te verdedigen, maar ook naar die van de anderen te luisteren en elkaar daarin te respecteren. Tevens heeft een zekere euforie over het gezamenlijke werk aan iets moois een band tussen ons gesmeed. Een goede rector zou voor dit resultaat alleen al de nodige taakuren over moeten hebben.

Wij zijn hard aan het werk met ons tweedeklas boek en hopelijk zullen we de komende jaren verder werken tot we een complete onderbouwmethode op de rails hebben.

Andere scholen kunnen ons materiaal gratis gebruiken. Wel vinden we het prettig om hiervan op de hoogte te zijn en wellicht kan zo een school zaken als antwoordenboekjes en proefwerkbundels helpen ontwikkelen.

Ook is ons materiaal aangemeld bij *www.openmethodes.nl* (zie aldaar voor gebruik en voorwaarden). Via deze organisatie kunnen scholen het materiaal naar hun eigen hand zetten en na verloop van tijd een alternatieve versie ter beschikking stellen.

Noten

[1] Het materiaal is te vinden op website site van de school, *www.barlaeus.nl*, bij ‘Publicaties’.

[2] Verwijzing naar de betreffende bladzijde(n) in het boek ‘Wiskunde voor de eerste klas van het gymnasium’.

Over de auteurs

Bart Zevenhek geeft wiskunde op het Barlaeusgymnasium. Daarnaast heeft hij de afgelopen jaren als ‘Leraar in Onderzoek’ aan de universiteit van Leiden onderzoek gedaan en hij was lid van de cTWO-werkgroep voor wiskunde C.
E-mailadres: *b.zevenhek@barlaeus.nl*
Nora Blom heeft op verschillende scholen voor voortgezet onderwijs gewerkt, ook enkele jaren op de Montessori-Pabo van de Hogeschool van Amsterdam, en geeft nu alleen nog wiskunde op het Barlaeusgymnasium.
E-mailadres: *n.blom@barlaeus.nl*

Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pikt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

Aansluiting: continu of discreet?

Op het programma van het Congres van het Koninklijk Wiskundig Genootschap staat traditiegetrouw een didactisch symposium. Dit jaar had het symposium de veronderstelde 'kloof' tussen het vwo en het wo als onderwerp. U raadt het al; het ging over het gebrek aan vaardigheden, hoe ernstig dat nu eigenlijk is, wat daaraan te doen is en al gedaan wordt, en of de nieuwe programma's vanaf 2013 dit probleem zullen oplossen. Deze rubriek is natuurlijk niet de plaats om dat symposium na te bespreken. Het is wel een goede aanleiding om eens in de geschiedenis van de aansluitingsproblematiek te duiken.

Een studentenactie

De vorige keer dat er een vergelijkbare opwinding over de aansluiting tussen (toen nog) middelbaar onderwijs en universitair onderwijs ontstond, was in de jaren twintig en dertig van de vorige eeuw. Een eerste signaal dat er iets speelde, is een actie van de zijde van studenten van de (toen nog) Technische Hogeschool Delft. In 1925 stuurden zij een brief aan de directeuren en rectoren van de HBS'en en Lycea waarin ze erop wezen dat de wiskundetentamens voor TH-studenten een groot struikelblok vormden. En net als bij de 'Lieve Maria'-actie, vonden ze de vooropleiding op de HBS tekort schieten. De remedie die ze voorstelden was om in de hoogste klas een facultatieve cursus 'in de grondbeginselen der hoogere wiskunde' te geven, een inleiding in de differentiaal- en integraalrekening. Er kwam maar één reactie op hun initiatief, waarin werd opgemerkt dat men er bij het onderwijs in Delft beter aan deed rekening te houden met wat de studenten vóór hun komst naar Delft aan kennis opgedaan hadden. Onnodig te zeggen dat die suggestie daar niet in goede aarde viel. Al schreven de studenten toen nog niet rechtstreeks aan de minister (en zouden ze die ook zeker niet lief genoemd hebben), toch bemoeide die zich met de zaak. Een wiskundeleraar die wel brood zag in zo'n cursus, schreef daarover aan de minister die prompt bij de curatoren van de Hogeschool navraag deed. Die konden moeilijk ontkennen dat wiskunde inderdaad een struikelvak was, maar een facultatieve cursus wezen ze af. Als de aankomende studenten eerst maar eens de gewone schoolstof beter beheersten, zou het al een stuk beter gaan!

Een hooglerarenactie

De studenten hadden niets bereikt, maar daarmee waren de problemen natuurlijk niet opgelost. Vervolgens namen de hoogleraren zelf het initiatief. De afdeling Scheikundige Technologie schreef eind 1931 een brief aan de Senaat van de TH, waarin zij 'als haar gevoelen te kennen geeft, dat heden ten dage de kennis en de algemeene ontwikkeling der nieuw ingeschrevenen veel te wenschen overlaten' (*zie figuur 1*).

Dat vond de overgrote meerderheid van de Senaat ook en besloten werd om te proberen deze kwestie samen met de exacte faculteiten van de algemene universiteiten en de Landbouwhogeschool bij de minister aan te kaarten. Dat leidde in 1933 tot een rapport van de 'inter-academiale commissie terzake onvoldoende vooropleiding' waarin de bekende noodklok werd geluid over 'de weinig bevredigende resultaten van de van de opleiding aan de Hoogere Burgerschool' en het 'te groot aantal studenten, dat […] in elementaire kennis te kort schiet'. Het rapport van de commissie riep heel wat reacties op, sommige met een hoog 'kijk naar je zelf'-gehalte, in andere werd op de zwakke onderbouwing van het geheel gewezen.

De rector van de TH Delft, de wiskundige J.G. Rutgers, hield in 1934 de jaarlijkse Diesrede en hij greep die gelegenheid aan om alle grieven die hij tegen de HBS had nog eens breed uit te meten (*zie figuur 2*, pagina 290).

Rutgers somde een bijna eindeloze lijst van bezwaren op, culminerend in de verzuchting: 'Het is naar mijne innige overtuiging de kwaal van het tegenwoordige onderwijssysteem aan de HBS, dat de technische vaardigheid in de mathematische vakken op een te lagen trap van ontwikkeling staat'.

Op verzoek van den Voorzitter licht de heer BÜSSIKEN den brief van de Afdeeling der Scheikundige Technologie toe. Daarna volgt een bespreking, waaraan vele leden deelnemen en waaruit blijkt, dat van hen, die in aanraking komen met de studenten der jongere studiejaren, velen de ervaring hebben opgedaan, dat hun kennis van wis-, natuur- en scheikunde onvoldoende is, dat ook de algemeene ontwikkeling bedenkelijk gedaald is en er vaak een schromelijk tekort aan belangstelling te constateeren is. Ook in latere studiejaren blijft de achterstand bestaan en is bijv. de kennis der Nederlandsche taal zeer onvoldoende. Het bezit van het eindexamen-diploma der H.B.S. is geen waarborg meer voor geschiktheid tot studie, zelfs niet wanneer daarbij het cijfer 7 of hooger behaald werd voor de wis- en natuurkundige vakken. Vooral door de leden, die ervaring hebben als deskundige bij de eindexamens, wordt geconstateerd, dat dit examen geen goede maatstaf meer is, sedert het op de tegenwoordige wijze afgenomen wordt.

figuur 1

figuur 2

figuur 3

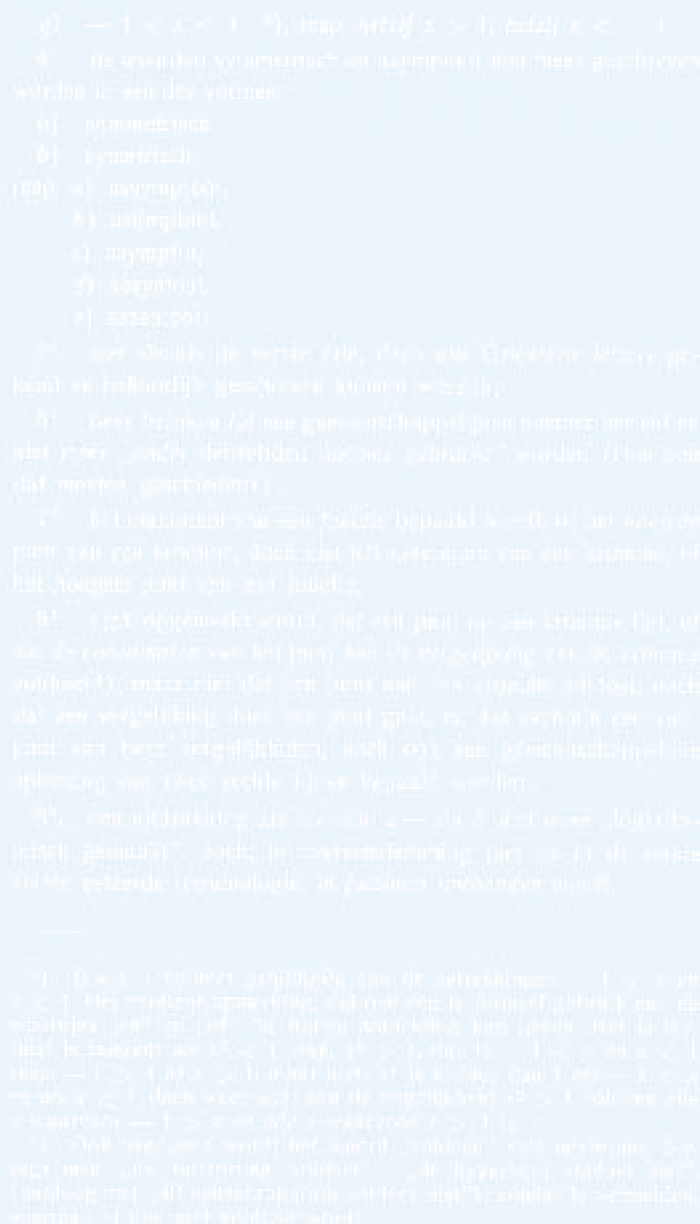
Ook die rede riep weer reacties op, onder andere van Dijksterhuis in *De Gids*.
Het was, net als nu, een heftige polemiek met ook toen een duidelijke verdeeldheid in de wiskundewereld. Nu is dat voor de overheid aanleiding om dan maar haar eigen keuzes te maken, toen ging het anders: de overheid deed gewoon niets.

Maak het nou eens concreet
Al de hiervoor geuite klachten zijn nogal vaag. Rutgers kwam niet veel verder dan te klagen dat 'langzamerhand een geheel andere geest over de geheele HBS [is] gevaren', in tegenstelling tot het onderwijs 'in haar besten dagen van vóór den oorlog' – de eerste wereldoorlog natuurlijk. Een meer concrete klacht werd geformuleerd door David van Dantzig. Die was in die tijd hoogleraar aan de TH, maar was daar nogal een buitenbeentje. Hij had, zowel in wiskundig als in didactisch opzicht, heel andere opvattingen dan de gevestigde orde aldaar. Maar natuurlijk kreeg ook hij in zijn onderwijs te maken met studenten die allerlei zaken die ze geacht werden te weten, niet konden of fout deden. Van Dantzig schreef daarover in 1940 een stukje in *Euclides* en daaruit wordt een beetje duidelijker wat nu de ergernis in Delft opwekte (***zie figuur 3*** en ***figuur 4***).
Foutief oplossen van de simpelste goniometrische vergelijkingen en kwadratische ongelijkheden, het door elkaar halen van een functie en haar grafiek, slordig formuleren, onnozele spelfouten, enzovoort. En eerlijk is eerlijk, ik heb zesentwintig jaar in Delft gewerkt en ik had het zelf kunnen schrijven…

Wat is er onder de zon?

Niets nieuws, zult u misschien zeggen. Dit soort geklaag is kennelijk van alle tijden, en moet je niet zo serieus nemen. Zoals altijd is het toch wat ingewikkelder. Naast treffende overeenkomsten met de discussie van tachtig jaar geleden, zijn er ook frappante verschillen. Toen, in de jaren twintig en dertig, gingen de veranderingen op de HBS, als ze er al waren, zeer geleidelijk. Er werd inderdaad wel wat in het programma gesnoeid, het aantal uren verminderde wat, maar welbeschouwd was het een tijdperk van grote stabiliteit. Het programma bleef in essentie tientallen jaren lang hetzelfde. Dat maakt dat de klachten van Rutgers c.s. wel een erg sterk 'toen wij nog jong waren'-gehalte hadden.

In de afgelopen decennia echter hebben er wel degelijk grote veranderingen in het Nederlandse wiskundeonderwijs plaatsgevonden. En u weet, elk voordeel heeft zijn nadeel. Dat de klachten van nu soms wat lijken op de klachten van toen, betekent daarom niet automatisch dat de klagers ongelijk hebben. Overigens maakt het onloochenbare feit dat de omstandigheden nu anders zijn, al evenmin dat ze nu wel gelijk hebben. Toen en nu zijn nu eenmaal, om de titel van een bekend TV-programma aan te halen, *Andere Tijden*.



figuur 4

Over de auteur

Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO).

E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*

Hoe staat het met de algebraïsche vaardigheden in de Tweede fase?

TUSSENEVALUATIE VAN DE HUIDIGE EXAMENPROGRAMMA'S WISKUNDE HAVO/VWO

[Hielke Peereboom]

Er wordt, met name vanuit de hoek van universiteiten en hbo-instellingen, de afgelopen jaren veel geklaagd over het gebrekkige instroomniveau van studenten, vooral als het gaat om de algebraïsche vaardigheden. Bij de invoering van de huidige examenprogramma's havo/vwo (in 2007) is in hoge mate rekening gehouden met de behoefte om de algebra op een hoger plan te tillen. In de discussie rondom de nieuwe wiskunde programma's (2014) voor de Tweede fase van het havo/vwo spelen (opnieuw) de algebraïsche vaardigheden een prominente rol.
Na de presentatie, door cTWO, van deze concept-examenprogramma's kwam, vooral vanuit de resonansgroep, opnieuw de oproep om kwantitatief en kwalitatief hogere eisen te stellen aan de algebraïsche vaardigheden.
In een reactie hierop heeft het ministerie van OCW aan cTWO gevraagd om in haar plannen de ervaringen met de 2007-programma's te betrekken. Het belangrijkste aandachtspunt hierbij is algebraïsche vaardigheden.

Opzet van de evaluatie van de ervaringen met de 2007 programma's

Het projectteam van cTWO heeft deze tussenevaluatie in de periode oktober 2008 tot januari 2009 uitgevoerd. Het belangrijkste doel hierbij: op grond van de ervaringen tot dusver met de examenprogramma's uit 2007, een voorspelling te kunnen doen over het instroomniveau bij de vervolgopleidingen, van de leerlingen die met deze examenprogramma's havo/vwo-examen hebben gedaan, in het bijzonder betreffende de algebraïsche vaardigheden.
Er is op vier fronten geëvalueerd:

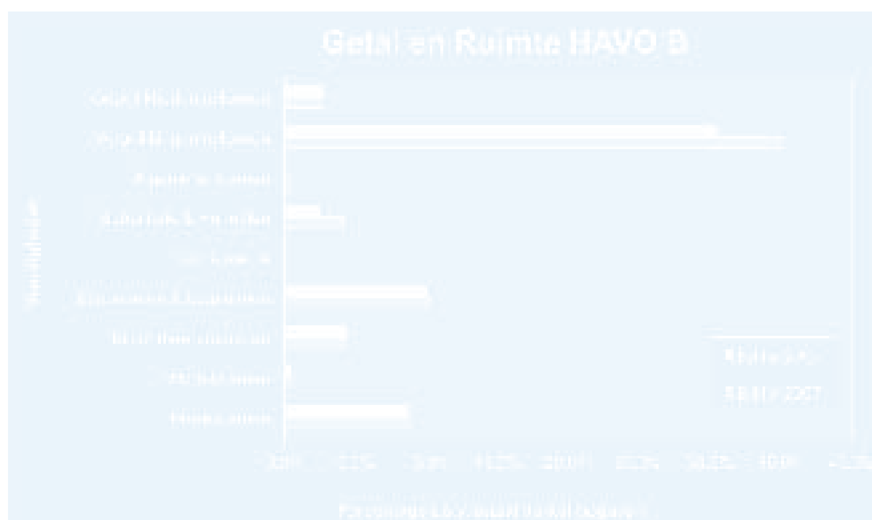
1. bij de twee grootste schoolmethodes (*Getal & Ruimte* en *Moderne wiskunde*) zijn de 2007-edities vergeleken met de vorige edities;
2. er is een enquête gehouden onder docenten;
3. er zijn interviews afgenomen bij wiskundesecties van 13 scholen;
4. er zijn toetsen op het gebied van algebraïsche vaardigheden ontwikkeld en afgenomen.

1. Vergelijking schoolmethodes

Bij beide edities van de hierboven genoemde methoden is geturfd hoeveel opgaven betrekking hebben op algebraïsche vaardigheden en is er een uitsplitsing gemaakt naar de onderdelen zoals die in de syllabi voor de huidige examenprogramma's genoemd worden: *breukvormen, wortelvormen, bijzondere producten, exponenten en logaritmen, goniometrie, substitutie en herleiden, vergelijkingen, ongelijkheden, algemene vormen.* Daarna is een vergelijking gemaakt tussen de beide edities. Het blijkt dat bij *Moderne wiskunde* (MW) de toename van het aantal algebraopgaven aanzienlijk meer is dan bij *Getal & Ruimte* (G&R). De oorzaak kan liggen in het feit dat MW met aparte algebrablokken is gekomen en het kan zijn dat G&R ten opzichte van MW in de vorige editie meer algebra bood.
De belangrijkste conclusies staan hieronder.

Havo wiskunde B

- Het aantal algebraopgaven is gestegen met 30% (MW) resp. 15% (G&R).
- De grootste procentuele toenames zijn te zien bij 'werken met wortelvormen', 'substitutie en herleiden van expressies' en 'werken met breukvormen'.



figuur 1 Percentage opgaven algebraïsche vaardigheden Getal & Ruimte, 4e en 5e klas havo wiskunde B (havo B deel 3 ontbrekend)

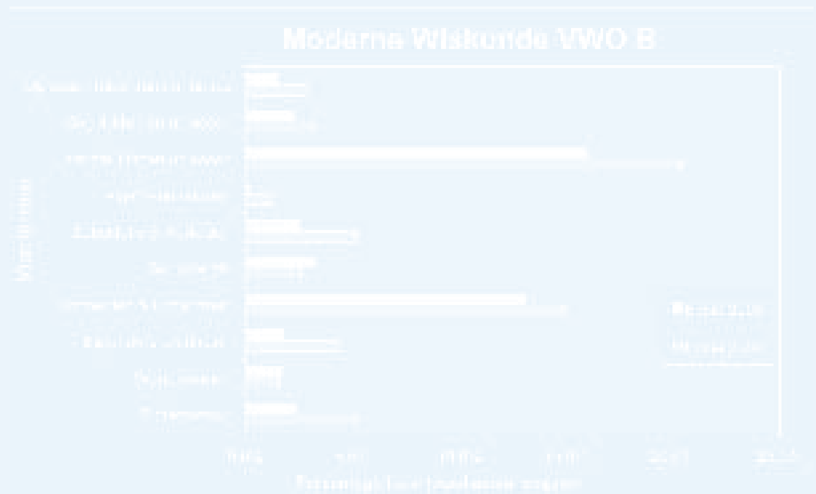
- Er zijn in verhouding veel opgaven met ‘vergelijkingen oplossen’ en ‘exponenten en logaritmen’.

Zie figuur 1 ter illustratie van de laatste conclusie met betrekking tot G&R.

Vwo wiskunde B

- Het aantal algebraopgaven is met ongeveer 33% (MW) en 19% (G&R) gestegen.
- De grootste procentuele toenames zijn te zien bij ‘werken met wortelvormen’, ‘substitutie en herleiden van expressies’, ‘werken met haakjes en bijzondere producten’ en ‘werken met breukvormen’.
- Er zijn in verhouding veel opgaven met ‘vergelijkingen oplossen’ en ‘exponenten en logaritmen’.

Zie figuur 2 ter illustratie van de laatste twee conclusies met betrekking tot MW.



figuur 2 Percentage opgaven algebraïsche vaardigheden Moderne wiskunde, 4e en 5e klas vwo wiskunde B

2. Enquêtes onder docenten

Het doel van de enquête was te achterhalen hoe docenten denken met betrekking tot de algebraïsche vaardigheden in de nieuwe programma’s 2007. Niet alleen zijn sommige eindtermen veranderd, maar ook zijn de meeste schoolboeken in een nieuwe editie uitgebracht, en verder is het voor docenten wellicht een goed moment om accenten in hun onderwijs te verleggen. Omdat er pas ruim een jaar ervaring is met de nieuwe programma’s, zijn er op dit punt nog weinig harde feiten, bijvoorbeeld eindexamenbevindingen. Vandaar dat er veel gewicht is toegekend aan de *verwachting* die de docenten hebben over het niveau van hun leerlingen in vergelijking met de situatie vóór 2007.
De enquête is door 191 docenten ingevuld, verspreid over 151 scholen. De onderstaande tabel geeft aan wat de respons is per vakonderdeel:

havo A	ca. 85
havo B	ca. 85
vwo A/C	ca. 80
vwo B	ca. 110

Conclusies

Bij alle onderzochte wiskundevakken wordt meer tijd besteed aan het trainen van algebraïsche vaardigheden. Bij havo wiskunde A is dit effect het kleinst, maar dat is ook niet verwonderlijk, aangezien er in het examenprogramma weinig eindtermen zijn opgenomen die hierom vragen. In het bijzonder bij de vwo-vakken zijn de verschillen in tijdbesteding voor en na 2007 aanzienlijk. Opvallend feit is dat veel docenten structureel tijd inruimen om wekelijks te oefenen met kale algebraopgaven.
Bij gebrek aan harde (examen)gegevens over de algebraïsche vaardigheden van leerlingen in de nieuwe programma’s, is gevraagd naar de verwachting van docenten. Deze verwachting zal deels zijn gebaseerd op de voornoemde extra aandacht aan het trainen, maar zeker ook op de resultaten die de leerlingen uit de 2007-lichting tot nu toe op toetsen hebben gehaald.
Bij alle wiskundevakken, en op alle terreinen, zien we een verbetering van vaardigheden. Dit geldt vooral voor manipuleren van breuken en wortelvormen en het omwerken en oplossen van vergelijkingen.
Voor het cijferen, werken met goniometrische formules en het oplossen van ongelijkheden zijn de verwachtingen het laagst. De laatste twee vaardigheden komen echter laat in het curriculum aan bod. De verbeteringen komen het duidelijkst naar voren bij vwo wiskunde B.

Twee voorbeelden

De tabel hieronder geeft voor havo wiskunde B weer hoe de docenten twee zaken aangaande algebra inschatten.

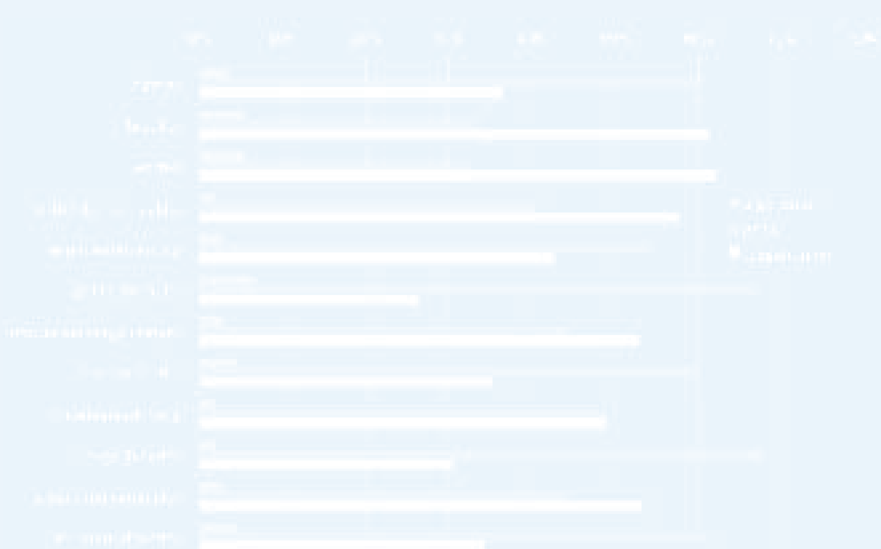
	afgenomen	gelijk gebleven	toegenomen
tijd besteed aan algebra	6%	29%	65%
percentage opgaven waarin exacte oplossingen worden gevraagd	1%	23%	76%

Figuur 3 (zie pagina 294) geeft de beleving weer van docenten met betrekking tot de vaardigheid van de leerlingen in verschillende algebraonderdelen bij vwo wiskunde B.

Bij een aantal onderdelen verwacht het merendeel van de docenten dat de algebraïsche vaardigheden gelijk zijn gebleven, maar bij deze onderdelen is het percentage docenten dat wél een verbetering verwacht ook aanzienlijk. Met name bij het cijferen (36% verwacht een verbetering), exponenten en logaritmen (43% verwacht toename), transformaties (35% verwacht toename), tweedegraads vergelijkingen (bijna 50% verwacht toename) en structuur doorzien (35% verwacht toename). Daarnaast zijn er onderdelen waarbij de verwachting overheerst dat er sprake is van toename: manipuleren van breuken (ruim 60% verwacht een verbetering), werken met wortelvormen (meer dan 60% verwacht verbetering), rekenen met haakjes (bijna 60%), het omwerken van vergelijkingen (43%) en substituties (bijna 55% verwacht toename).

3. Interviews

Bij de interviews die op de scholen zijn afgenomen, zijn ook vragen aan de orde geweest die niet specifiek betrekking hebben op de algebraïsche vaardigheden. We beperken ons hier echter tot dat laatste. Algemeen kan worden gesteld dat men van mening is dat er, zowel kwantitatief als kwalitatief, (veel) meer aandacht is voor algebraïsche vaardigheden. Wat verder opvalt, is dat leerlingen (vooral bij wiskunde B) in principe nu eerst kiezen voor een algebraïsche oplossing van een probleem waar voorheen die rol was toebedacht aan de grafische rekenmachine. Hoewel er nog maar ruim een jaar ervaring



figuur 3 Resultaten verwachtingen docenten t.a.v. algebraïsche vaardigheden vwo wiskunde B

figuur 4 Twee toetsvragen

is met het nieuwe programma, bestaat de indruk dat de vaardigheden van leerlingen op dit terrein langzaam toenemen. Concreet worden genoemd: rekenen met machten, het oplossen van vergelijkingen, rekenen met breuken, toepassen differentieerregels, rekenen met wortels.
Wat betreft de vraag naar hoeveel meer tijd wordt besteed aan algebra, worden bij vwo wiskunde A percentages genoemd van 10 tot 20% en bij vwo wiskunde B van 20 tot 40%. Voor havo zijn deze percentages respectievelijk 0 tot 15% en 15 tot 40%.
Leerlingen van nu grijpen beduidend minder vaak naar de grafische rekenmachine. Vooral bij wiskunde B wordt vaak eerst naar algebraïsche oplossingen gezocht. Het aanleren van het 'when to use', in combinatie met formele algebraïsche oplossingen, staat nog in de kindeschoenen. Het komt bijvoorbeeld voor bij een oriëntatie op een probleem en als controlemogelijkheid van de gevonden oplossing. Bij wiskunde A ziet men nauwelijks een wijziging in het gebruik van de grafische rekenmachine.

4. Toetsen

Het idee van dit deel van het onderzoek was om in vwo-5 (nieuwe programma) en in vwo-6 (oude programma) een toets af te nemen die zich richt op algebraïsche vaardigheden. Als in de nieuwe situatie de leerlingen echt zoveel vaardiger zijn, dan zijn van de groep 5-vwo'ers betere resultaten te verwachten dan van 6-vwo'ers, ondanks het feit dat de laatste groep een jaar langer wiskunde heeft gehad.
De algebraïsche vaardigheden bij wiskunde B staan het meest ter discussie. Daarom is gekozen om de leerlingtoets op dat vak te richten. Er is vergeleken met zowel wiskunde B1 als B12 in vwo-6.
Bij het opstellen van de toetsen is gekeken naar de onderdelen uit klas 4 en 5. De volgende algebraïsche vaardigheden komen daar aan bod:

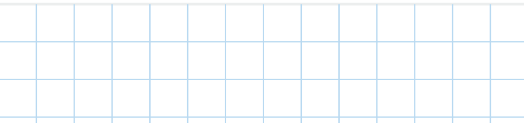
- manipuleren van breukvormen;
- manipuleren van wortelvormen;
- werken met haakjes;
- gebruiken van rekenregels voor machten;
- herleiden van vergelijkingen;
- vergelijkingen oplossen;
- werken met logaritmische vormen;
- oplossen van exponentiële en logaritmische vergelijkingen;
- het oplossen van problemen waarvoor inzicht in een formule nodig is.

Op basis van deze lijst zijn drie toetsen gemaakt, met bij iedere vaardigheid een daarmee corresponderende vraag. Een voorbeeld van twee toetsvragen is te zien ***in figuur 4***.
Het nakijken is zonder nuances gebeurd: een antwoord was óf helemaal goed, óf fout. Alleen het eindantwoord werd beoordeeld, niet de stappen die naar dit antwoord leidden.
De toets is uitgevoerd op negen scholen. De respons van de negen scholen:

Klas 5	171 leerlingen
Klas 6	210 leerlingen
van wie wiskunde B12	37 leerlingen

In de tabel op pagina 295 staat, per categorie, het percentage leerlingen dat een vraag goed heeft beantwoord.

Docenten gaven aan dat de leerlingen het een pittige toets vonden. Bovendien waren de leerlingen niet gewend om op een dergelijke manier kriskras door de stof heen getoetst te worden. Vwo-6 leerlingen gaven aan de formulekaart te missen (in vwo-5 mag die niet meer gebruikt worden). De rigiditeit waarmee is nagekeken, is zeker debet aan de lage scoringspercentages.



	Klas 5 (B-2007) in %	Klas 6 (B1 en B12) in %	Factor waarmee klas 5 beter scoort dan klas 6	Dezelfde factor, maar nu enkel vergeleken met B12
breukvormen	60	40	1,5	1,1
wortelvormen	38	30	1,3	0,8
haakjes	62	55	1,1	1,0
machten	44	34	1,3	0,9
herleiden	66	49	1,3	0,9
vergelijkingen	63	60	1,1	1,0
log. vormen	25	13	1,9	1,9
exp. vergelijkingen	19	25	0,8	0,4
inzicht	20	20	1,0	0,5

Conclusie
Het blijkt dat de 2007-leerlingen de toets op elementaire onderdelen veel beter maken dan de zesdeklassers, ondanks het feit dat zesdeklassers een jaar langer wiskunde hebben gehad! Bij zaken als het toepassen van rekenregels voor logaritmen kan het zijn dat het gebrek aan een formulekaart de vwo-6 leerlingen parten heeft gespeeld. Voor het manipuleren van breuken en wortelvormen lijkt ons dat niet het geval. Het is opvallend dat zelfs in vergelijking met de 'elitegroep' van wiskunde B12-leerlingen de vijfdeklassers goed presteren.
Alleen bij de complexere vragen – enigszins bewerkelijke exponentiële vergelijkingen en inzichtvragen waarbij de structuur van een formule moest worden herkend – scoren de zesdeklassers en vooral de B12-leerlingen beter. Wij vermoeden dat dit komt doordat deze groep hiermee nu eenmaal een jaar langer ervaring heeft.

Algemene conclusies
De uitgevoerde 2007-inventarisatie geeft een beeld van het effect van de extra aandacht voor de algebraïsche vaardigheden.
- De vergelijking van de schoolboeken laat duidelijk zien dat er aanzienlijk meer aandacht is voor algebraïsche vaardigheden.
- Dat dit succes heeft, blijkt uit de uitslagen van de leerlingtoetsen: leerlingen uit de vijfde klas scoren duidelijk beter dan zesdeklassers, ondanks het feit dat zesdeklassers een jaar langer wiskunde hebben gehad. Het niveau van deze toetsopgaven ligt dicht bij het niveau van de instroomtoetsen van het wo.
- Dit is in overeenstemming met de ervaringen en de verwachtingen die docenten hebben. De vaardigheden zijn met name toegenomen voor elementaire algebra, en ook bij het werken met breuken of wortels en bij het oplossen van vergelijkingen. Complexere vaardigheden, zoals werken met ongelijkheden, goniometrische functies of inzichtsommen, zijn niet significant verbeterd. Kanttekening hierbij is dat deze vaardigheden in klas 4 en begin klas 5 vaak nog niet aan bod zijn gekomen, zodat docenten hiermee nog weinig ervaring hebben onder de nieuwe programma's.
- Docenten verwachten dat de leerlingen in de nieuwe examenprogramma's voldoende voorbereid zijn voor de vervolgopleiding. Er wordt wel op gewezen dat het lastig is om het vereiste eindniveau in te schatten, omdat er nog geen examens zijn voor deze programma's.

Bovenstaande opmerkingen gelden voor wiskunde B sterker dan voor wiskunde A. Samengevat mag geconcludeerd worden dat de beheersing van de algebraïsche vaardigheden in leerjaar 4 en 5 als gevolg van de nieuwe examenprogramma's aanzienlijk is toegenomen en dat er geen aanleiding lijkt te zijn om in dit stadium een extra verzwaring van deze vaardigheden in de wiskunde A- en de wiskunde B-programma's te bepleiten. Definitieve duidelijkheid hierover kan echter pas ontstaan nadat de eerste examens zijn afgenomen (havo: 2009, vwo: 2010) en resultaten bekend worden bij de vervolgopleidingen/studies.

Bij de besprekingen tussen OCW en cTWO om te komen tot overeenstemming over de inhoud van de experimentele examenprogramma's heeft deze tussenevaluatie een belangrijke rol gespeeld.
De volledige tekst van de tussenevaluatie van de 2007-programma's is te vinden op *www.ctwo.nl* onder het kopje *Publicaties*.

Over de auteur
Hielke Peereboom is (samen met Theo van den Bogaart en Sieb Kemme) lid van het cTWO-projectteam.
E-mailadres van het projectteam:
info@ctwo.nl

Grenslengte

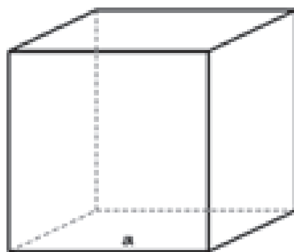
[Yvonne Killian]

'Als een kubus een oppervlakte heeft, waarom heeft 'ie dan geen omtrek?' vraagt Fenna. Ik vraag haar hoe ze die zou willen uitrekenen. 'Ik wil helemaal niks uitrekenen, dat laat ik liever aan U over, maar volgens mij moet je dan alle omtrekken bij elkaar optellen, net als we net met alle oppervlakken deden!'
Leuk bedacht, zeker als je het antwoord van Fenna's berekening door twee deelt, maar de omtrek bij ruimtefiguren betekent in de praktijk al iets anders, namelijk de maximale omtrek van cilinder- of bolachtige lichamen – bij cilinderachtigen evenwijdig aan het grondvlak. Zoals de omtrek van je bovenarm of je schedel.

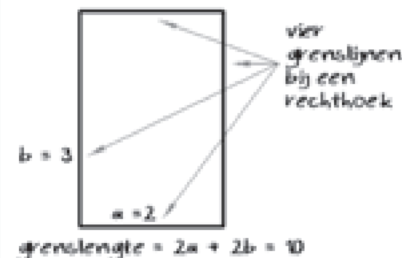


figuur 1

Maar veel storender dan de zojuist genoemde betekenis van het woord omtrek, vind ik het verschijnsel dat het *woord* omtrek bij de meeste leerlingen geen beeld oproept. Zodat velen, ook na 'tig keer' uitleggen, omtrek en oppervlakte door elkaar halen.
Onlangs viel me in een wiskundeboek voor het vmbo op, dat *gelijkbenige* driehoeken er *symmetrische* driehoeken werden genoemd. Als extra benaming vind ik dat prima. Maar nee, de term gelijkbenige driehoek was helemaal weggelaten. Raar. Ik tekende altijd braaf klungelige voetjes, armpjes en hoofdjes bij de gelijke benen op het bord en niemand had ooit problemen met de term gelijkbenig. Maar de naamsverandering bracht me wel op een idee. Ik besloot een poging te wagen om het verwisselen van oppervlakte en omtrek een halt toe te roepen met een, nog te bedenken, nieuw woord voor omtrek.
Een duidelijker en makkelijker woord



figuur 2



figuur 3

voor omtrek bedenken viel niet mee. Maar tenslotte vond ik iets. Naar analogie met de vlakke en gebogen grens*vlakken* van *ruimte*-figuren, kun je de rechte en gebogen lijnen die *vlakke* figuren begrenzen grens*lijnen* noemen. De totale lengte van de grenslijnen van een vlakke figuur kun je dan *grenslengte* noemen, maar zeg er dan asjeblieft wel bij dat dit een andere naam voor *omtrek* is!
Voor de grenslengte van ruimtefiguren kunnen we dan Fenna's definitie nemen. Gedeeld door twee. En, Fenna, wat is de grenslengte van een bol?

Over de auteur
Yvonne Killian is wiskundeleraar op het Oostvaarderscollege in Almere. Ze bedenkt graag nieuwe, makkelijke manieren om moeilijke zaken uit te leggen. In *Euclides* kwam u haar eerder tegen met een truc om cirkel- en bolformules te onthouden (jrg. 81, nr. 5) en met een alternatieve uitleg voor de stelling van Pythagoras (jrg. 81, nr. 7).
E-mailadres: *ykillian@planet.nl*

Wiskundeonderwijs in de dagelijkse praktijk

OP BEZOEK BIJ AOC OOST VMBO IN TWELLO

[Marjanne de Nijs]

De sectie wiskunde
De sectie wiskunde bestaat uit zeven personen, ik spreek met twee van hen (***zie foto 1***). Tanja Buitenhuis is sectieleider, zit 13 jaar in het onderwijs en is precies zoveel jaar werkzaam op deze school (vmbo-groen). Ze heeft het hier dan ook duidelijk naar haar zin. Eric-Jan Venema heeft al een andere carrière achter de rug, 25 jaar in de metaal en de ICT, nu 3 jaar voor de klas. Nog studerend voor de tweedegraads bevoegdheid en zeer enthousiast over zijn carrièreswitch, maar ook blij met de bagage die hij eerder opgedaan heeft. In de loop van het gesprek zal ook Odetta Kastelein aanschuiven.
De sectie houdt van korte vergaderingen; dan is er tijd over voor constructief overleg tussen docenten die lesgeven in dezelfde jaarlaag. Toetsen zijn met de jaren ontstaan en vaak was daar één persoon verantwoordelijk voor in overleg met de anderen. Dat geeft nu een overzichtelijke situatie. Tanja: *Er is geen verschil in toetsen, geen verschil in normeringen. We stellen duidelijke eisen en weten dat ook van elkaar; we kunnen leerlingen ook precies vertellen waarop we zullen letten bij de verschillende hoofdstukken.* De houding naar elkaar is open en collegiale consultatie wordt niet geschuwd.
Veel van de leerlingen hier hebben in het verleden slechte ervaringen opgedaan met rekenen. Dat betekent voor het vak wiskunde dat bij het aanleren ervan wel eens tegen die weerstand opgebokst moet worden. In de loop van het gesprek zal blijken dat juist op deze school overal wiskunde aanwezig is, vaak zonder het expliciet te benoemen.

Profiel van de school
AOC Oost Twello is een verticale vmbo/mbo-school in het GROENE onderwijs. Er zijn veel praktijkvakken, met hun oorsprong in de agrarische sector, zoals dier (groot en klein), plant (binnen en buiten), bloem, verwerking van agrarische producten, hovenier en techniek.

1. Koppeling theorie en praktijk
Bij het vmbo-groen onderwijs is het belangrijk dat er een duidelijke relatie is tussen de theorie en praktijk. De school ligt prachtig in het groen, de parkjes om de school zijn goed onderhouden, voornamelijk door leerlingen. Bij de meeste planten staat een bordje met de naamaanduiding. Er zijn schooltuinen, kassen en dieren. Deze inrichting maakt het eenvoudig om vanuit de klas direct naar de praktijk te verwijzen en theorie direct te integreren.

2. Projectonderwijs
De visie van de school is 20% van de onderwijstijd te besteden aan project-onderwijs. Om daar voor een deel invulling aan te geven is in het verleden 5 minuten van elk lesuur afgehaald en tijd vrij gemaakt voor de zogenoemde ZSM (Zelf Studie Middag).

> **"Maar meneer, als u dat nou zo graag wilt, dan doen we het wel!"**

Docenten zijn verdeeld over de verschillende leerjaren en elk leerjaar heeft een vaste middag per week project-onderwijs, met elk per jaar ongeveer 5 à 6 projecten. Dit zijn vakoverstijgende projecten waarbinnen de vakken ondergeschikt zijn aan het onderwerp. Het lesmateriaal bevat instructies die leerlingen zelfstandig kunnen uitvoeren, begeleid door de aanwezige docenten. De wiskundesectie participeert in het ontwikkelen van les-materiaal voor de projectmiddagen. Het AOC Oost, als groen onderwijs, is lid


foto 1 Eric-Jan Venema en Tanja Buitenhuis

van *Groenkennisnet*. Hierdoor kunnen de docenten beschikken over een database van meer dan 50.000 leerobjecten die gebruikt kunnen worden voor bijvoorbeeld dit projectonderwijs. Dit gebeurt via de *Educatieve Content Catalogus* (ECC, een product van Het Ontwikkelcentrum uit Ede[1]). Het is een digitale omgeving waarin door docenten gemaakt materiaal overzichtelijk geordend is en daardoor snel te vinden. Informatie wordt op deze wijze centraal beheerd en het delen van kennis verlaagt de werkdruk. Deze catalogus biedt ook een ontwikkelmethode (CAT, Content Arrangeer Tool) om op eenvoudige wijze een website te maken. Hierdoor kunnen ook collega's die niet veel computer-ervaring hebben, hun (project)lessen digitaal aanbieden en opslaan.

3. Vaardigheden
De school is bezig met het invoeren van competentiegericht onderwijs en houdt vorderingen van leerlingen bij in een portfolio. Dat betekent dat bij het project-onderwijs op de ZSM de beoordeling voornamelijk gericht is op de vaardigheden die een leerling ontwikkelt. Dit gebeurt op basis van 18 geformuleerde competenties

die regelmatig getoetst worden, van leerjaar 1 tot en met 4, zodat groei zichtbaar is.

De wiskundedocent aan het werk
In de onderbouw wordt er drie uur per week wiskunde gegeven en daarnaast is er een rekenuur. De docenten kenmerken hun school als scenario 2 met een stukje richting 3. Leerlingen werken voornamelijk zelfstandig met af en toe een klassikaal moment. Tanja: *Ik moet heel eerlijk zijn, leerlingen vragen er soms ook om. 'Kunt u niet gewoon weer eens op het bord wat voordoen en uitleggen'. En dat doe ik wel eens, maar niet consequent: uit ervaring weet ik dat sommige hoofdstukken klassikaal moeten worden opgestart en andere kunnen prima zelfstandig uitgevoerd.*

Voor de wiskundedocenten op deze school is het heel belangrijk dat ze voor leerlingen een duidelijke koppeling kunnen leggen naar de praktijk. Of zoals Eric-Jan zegt: *Praktijksituaties aanhalen die ze kennen. De uitdaging daarbij is dan het op gang brengen van bewustwording bij de leerling van eigen wiskundige vaardigheden zoals inzicht, probleemaanpak en oplossingstrategieën in praktijksituaties. Wiskunde moet hier handen en voeten krijgen om het wendbaar te kunnen gebruiken.*

Tijdens een rondleiding binnen en buiten de school blijkt hoe ze dat doen. Bij bloemsierkunst, waar leerling Marvin mij spontaan een zelfgemaakt boeket aanbiedt, zien we het werken met verhoudingen. Bij techniek onder andere het berekenen van de inhoud van een cilinder. Bij de kassen wordt statistisch onderzoek gedaan naar kwaliteit van de voedingsbodem. Bij het verwerken van agrarische producten (koken) is er uiteraard het werken met recepten en verhoudingen. Tanja en Eric-Jan kunnen, ondersteund door de rondlopende collega's, overal wel de wiskunde benoemen.
Bij mooi weer is er de mogelijkheid naar buiten uit te wijken om de lesstof op een andere manier over te brengen. Een markant gebouw naast de school is de stal (*zie foto 2*). Tanja vertelt dat ze deze gebruiken in de les om inhoudsberekeningen te maken, eind klas 3 / begin klas 4 niveau KB/GL. Eerst de vormen herkennen die er in zitten, dan van de verschillende vormen de inhoud bereken, vervolgens de totale inhoud van het gebouw bepalen. Alles wordt door leerlingen zelf opgemeten. Dit gaf ook inspiratie voor het GWA van klas 3BB: het maken van een (eenvoudige) maquette, met vorig jaar als uitdaging een nieuw schoolgebouw te ontwerpen. Ook dichtbij zijn de sportvelden, waar hoge lichtmasten staan geplaatst, zeer geschikt voor hoogtemeting met behulp van schaduw. Eric-Jan vertelt dat hij op een snikhete dag het onderwerp hoeken naar buiten heeft verplaatst.
Met allerlei materiaal uit het bos zijn de leerlingen rechte en scherpe hoeken gaan construeren, een activiteit die op dat moment meer effect had dan het werken uit een boek. Eric-Jan memoreert een succesmoment: *'Meneer, ik had zo'n hekel aan rekenen maar wiskunde is nu echt mijn leukste vak!'*

> **"Meneer, ik had zo'n hekel aan rekenen maar wiskunde is nu echt mijn leukste vak!"**



foto 2 De stal

De specialiteiten van het wiskunde-onderwijs op AOC Oost Twello
1.Werken met Moderne Wiskunde
De sectie gebruikt *Moderne wiskunde*, een methode waar leerlingen vanaf dag één zelfstandig mee aan de slag kunnen. Ze zijn er tevreden over maar hebben volgend jaar een evaluatie ingepland om te bekijken of een wijziging nodig is. Ongeacht de methode is de ervaring dat er altijd een deel van de leerlingen moeite heeft met het werken met teksten uit een boek. Ze begrijpen de vraag niet en kunnen dus met moeite op een antwoord komen. Odetta geeft aan dat soms, op basis van het antwoord uit het antwoordboekje, leerlingen proberen terug te redeneren naar wat met de vraag dan precies bedoeld wordt. Soms is een onderwerp voor leerlingen verwarrend. Eric-Jan vertelt van een hoofdstuk over formules dat net afgerond is: de uitleg van rekenpijlen en woordformules, verschillende notaties voor hetzelfde. Waarom ze uiteindelijk maar één notatie mogen gebruiken terwijl de andere hetzelfde betekent, is lastig uitleggen. Leerlingen verzuchtten toen: *'Maar meneer, als u dat nou zo graag wilt dan doen we het wel!'*
Af en toe is er de keuze om buiten het boek om te gaan en een hoofdstuk op een andere manier aan te bieden. Er is bijvoorbeeld een doe-boekje gemaakt voor het vervangen van een hoofdstuk over coördinaten.
Met een plattegrond van de school gaan leerlingen naar verschillende locaties om iets op te zoeken. In de tijd van het jaar dat de leerlingen buiten gymmen, staat het grootste deel van de tijd de gymzaal leeg.

Met behulp van opdrachtkaarten voeren leerlingen hier dan verschillende wiskunde-opdrachten uit. Derdeklassers gaan met de kennis die ze de afgelopen jaren opgedaan hebben, aan de slag met de lijnen op het veld en de stelling van Pythagoras, het meten van de omtrek van basketballen, zodat ze daarna de diameter kunnen berekenen enz.

2. Rekenvaardigheden

Naast 3 uur wiskunde krijgen de leerlingen dit jaar in klas 1 en klas 2 ook een uur rekenen om vaardigheden te oefenen. In klas 1 gaat het om gecijferdheid, alle basisvaardigheden zonder rekenmachine. In klas 2 is het gekoppeld aan economie, vooral het rekenen met procenten en praktische opgaven. Een basisschooldocent geeft deze lessen en maakt voor het oefenen van een aantal onderwerpen gebruik van computersoftware. Het idee is om volgend jaar een rekenrijbewijs in te voeren; leerlingen kunnen een certificaat verdienen dat ook in hun portfolio gaat. Er komt een betere afstemming tussen de rekenlessen en de wiskundelessen waardoor leerlingen tijdig de juiste basisvaardigheden krijgen aangeboden die als voorkennis dient voor een te behandelen hoofdstuk.

3. Vier handen voor de klas

Odetta*: Het is ontstaan uit het feit dat je een leerling individueel wilt kunnen helpen en dat kan niet voor langere tijd als er nog 12 of 13 omheen staan die ook die aandacht nodig hebben. Als je nu twee klassen en twee docenten samenvoegt, kan je die druk spreiden; op dit niveau zie je ook veel meer dat het belangrijk is wie het ze nu uitlegt. Sommige zweren bij de ene docent en sommige bij de andere, dan is het handig als je die keuze hebt.*

Uit twee naast elkaar gelegen klaslokalen is de tussenmuur gebroken en vervangen door een voortrekwand die snel weggehaald of teruggezet kan worden. In de eerste klas krijgen alle leerlingen wiskunde van twee docenten die naast elkaar lesgeven en vrijwel altijd de wand open zetten. Klassikale uitleg is voornamelijk activerend of omdat uit ervaring gebleken is dat een bepaald onderwerp of specifiek vraagstuk echt even centraal aandacht verdient. Verdere werken leerlingen met een eigen planning en is er dus ruimte om een leerling apart te nemen voor wat meer ondersteuning.

4. Dyscalculie

Dit jaar is voor het eerst meer onderzoek gedaan naar leerlingen met dyscalculie. Er is een instaptoets en als daaruit en in de lessen blijkt dat een leerling uitvalt, komt er een vervolgonderzoek. Is er sprake van een duidelijke problematiek, dan krijgt deze leerling extra tijd bij toetsen en mogen ze gebruik maken van een 'onthoudschriftje'.


figuur 1


figuur 2 Achimedes' stomachion

De komende jaren zal moeten blijken of dit voldoende is.

5. Koppeling praktijk en theorie

Tijdens de rondleiding door de school komen we Willeke tegen, een collega van Tanja en Eric-Jan. Zij vertelt over een praktijkopdracht met veel wiskunde. Een aantal leerlingen van de basisberoepsgerichte leerweg krijgt een stuk grond (***zie foto 3***) dat ze zelf mogen inrichten. Ze meten het op, bepalen omtrek en oppervlakte en kiezen een zinvolle en gelijke verdeling van het stuk grond. Als het indelingsvoorstel is goedgekeurd, gaan ze met hun eigen deel aan de slag. Van hun eigen stuk tuin moeten leerlingen vervolgens weer de omtrek en oppervlakte bepalen en op papier een plan aanleveren voor de inrichting. Daarbij hoort een tekening op schaal maar ook de kosten van de verschillende onderdelen. Ze hebben een budget dat moet kloppen en waarvoor ze verantwoording afleggen. Ook een goede urenplanning hoort hierbij. Na goedkeuring mogen ze aan de slag om 'hun' tuin werkelijk te maken. En ondertussen zijn ze op allerlei manieren met wiskunde bezig, aansluitend op hun toekomstige werksituatie. Willeke: *Als iets motiveert dan is het iets wat echt is. Het is vaak de abstractie die ze niet snappen: omtrek en oppervlakte betekenen niets voor ze. Maar nu kan ik de komende twee jaar zeggen: weet je wel… waar je dat bandje hebt neergelegd.*

Dit project is vastgelegd in een webquest (***zie figuur 1***), waarbij alle gegevens voor leerlingen via een website te benaderen zijn. Het materiaal is ook opgenomen in de Educatieve Content Catalogus.


foto 3

Archimedes in vmbo-1

In het kader van zijn studie volgde Eric-Jan het vak getaltheorie. Hij heeft als eindopdracht een lesontwerp gemaakt rond het thema bewijzen en redeneren. Niet eenvoudig om dit te willen doen voor een eerste klas vmbo met leerlingen van niveau BBL en LWOO tot GL. Hij heeft er voor gekozen om ze te laten kennismaken met Archimedes: *een oude wijze man met sandalen aan die met een stok schrijft in het zand*. Aan de hand van de *Stomachion van Archimedes*, een soort tangram van 14 stukken (***zie figuur 2,*** op pagina 299), maakte hij een lessenserie.

Eric-Jan: Ik denk dat het didactisch proces voor dit niveau net zo belangrijk is als voor havo en vwo. Er is een eindig aantal stukjes, dus ook een eindig aantal oplossingen; dit leidt tot interessante klassengesprekken. Want wat is bijvoorbeeld oneindig? Er is een directe koppeling te maken met de praktijk. Bij het ontwerpen van een tuin is er ook sprake van een aantal elementen dat geplaatst moeten worden op een afgebakend gebied. Hoe kan je die het best rangschikken?

Leerlingen gaan eerst met veel minder stukken aan de slag om een vierkant te construeren en leren iets over symmetrie, verschuiven, roteren en spiegelen maar ook methodisch tellen en combineren. Langzaam wordt toegewerkt naar een hoger niveau waarbij de puzzelvaardigheid van belang is.

Als u geïnteresseerd bent in het materiaal, stuur dan gerust een e-mail naar Eric-Jan Venema (*ejvenema@aoc-oost.nl*).

Tanja, Eric-Jan en alle andere collega's die ik gesproken heb in Twello, hartelijk dank voor het mogen meekijken in de dagelijkse praktijk van een VMBO-Groen.

Noot

[1] Website Het Ontwikkelcentrum: *www.ontwikkelcentrum.nl* ; Informatie ECC: *www.ontwikkelcentrum.nl/asp/forum2003/documenten/vmbog/jon%20Advertorial%20Ontwikkelcentrum.pdf* .

Over de auteur

Marjanne de Nijs is redacteur van *Euclides* en docent wiskunde op de Hogeschool Utrecht.
E-mailadres: *nijs0471@planet.nl*

Mededeling / Website Kennislink volledig vernieuwd



Sinds woensdag 15 april 2009 is een volledig vernieuwde versie van de populair-wetenschappelijke website ***www.kennislink.nl*** online.

Kennislink wordt in opdracht van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap (OCW) én met financiering door de wetenschap uitgevoerd door Stichting Nationaal Centrum voor Wetenschap en Technologie (NCWT).

De site is overzichtelijker en completer geworden, en ook qua vormgeving ingrijpend veranderd. De eerste versie van **Kennislink.nl** werd op 15 april 2002 gelanceerd. Inmiddels trekt de website gemiddeld vijftienduizend unieke bezoekers per dag. Daarmee is de website uitgegroeid tot één van de meest bezochte populair-wetenschappelijke websites in het Nederlandse taalgebied.

Kennislink.nl biedt nieuwsberichten, achtergrondartikelen en dossiers over bètawetenschappen en techniek, taal-, gedrags- en maatschappijwetenschappen, economie en bedrijfskunde. Medio 2009 komen daar geschiedenis en archeologie bij. In samenwerking met de website *www.ditisbiotechnologie.nl* ontsluit Kennislink voortaan ook informatie over biotechnologie. Op termijn hoopt de website eveneens technische toepassingen te belichten op het gebied van nano-, informatie- en cognitietechnologie.

'Met de vernieuwde website hopen we wetenschap en techniek nóg spannender en aanschouwelijker te maken,' vertelt Carl Koppeschaar, hoofdredacteur van Kennislink. 'Niet alleen in tekst en beeld, maar ook met filmpjes en geluid. Verder gaan we mogelijkheden tot interactiviteit benutten. Zo zullen we wetenschappers op de voet volgen bij hun onderzoek. Dr. Anne Schulp, bèta-ambassadeur en paleontoloog verbonden aan het Natuurhistorisch Museum in Maastricht, hoopt bijvoorbeeld deze zomer opgravingen te gaan verrichten in Angola. Hij wil daar fossielen blootleggen van onder andere de mosasaurus. Overblijfselen van deze 65 miljoen jaar geleden uitgestorven *Maashagedis* werden voor het eerst gevonden in mergelgroeven van de Sint Pietersberg ten zuiden van Maastricht. Ook in het zuiden van Angola komt zo'n zelfde aardlaag aan de oppervlakte. Via zijn blog op Kennislink zal Anne Schulp de bezoekers in woord en beeld op de hoogte houden van zijn ontdekkingen.'

In de toekomst kunnen scholieren en bezoekers ook steeds meer zélf meedoen met onderzoek. Al eerder werkte Kennislink mee aan het bepalen van de 'democratische afstand van de aarde tot de zon'. Dat was tijdens de overgang van de planeet Venus voor de zon in 2004 (zie *www.venusovergang.nl*). Inmiddels speuren ook meer dan 31.000 deelnemers naar nieuwe 'abc-drietallen'. Dat gebeurt op de door het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden en Kennislink gestarte wiskundewebsite *www.rekenmeemetabc.nl/*.

Niet alleen op het gebied van sterrenkunde en wiskunde, maar ook op het gebied van taal, gedrag en maatschappij gaat Kennislink zulke onderzoeken opstarten.

Vanuit de oude doos

[Ton Lecluse]

Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!

Drie cirkels

Naar aanleiding van een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1931:
In driehoek *ABC* zijn de hoogtelijnen *BE* en *CF* getrokken, die elkaar snijden in *H*. Bewijs, dat de cirkels, beschreven om de vierhoeken *AEHF* en *BFEC* elkaar loodrecht snijden. Bewijs tevens, dat de oppervlakken van deze cirkels samen gelijk zijn aan dat van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*.

U wordt eerst uitgedaagd een tekening te construeren die aan de gegevens voldoet. (Dan pas onder de streep spieken!) Wellicht helpt het dit model te tekenen met een dynamisch computerprogramma.

Vanwege de hoogtelijnen zijn de vierhoeken *AFHE* en *BFEC* koordenvierhoeken en dus zijn de twee cirkels zijn inderdaad correct beschreven in de opgave.



figuur 1

Gekozen is de raaklijnen in het snijpunt *E* te tekenen (***zie figuur 1***). Het probleem is in deze wirwar van lijnen (en twee cirkels) te gaan zoeken naar gelijke hoeken, die kunnen bijdragen aan het bewijs.
Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Stel $\angle ACB = p$ (en zie daarvoor ***figuur 2***).

figuur 2



Waarom is $\angle NEB$ hieraan gelijk? Welke hoeken in de figuur zijn gelijk aan $\angle EBC$?
Gebruik:

- de hoek tussen koorde en raaklijn;
- (gelijke) hoeken op een cirkelboog;
- overstaande hoeken.

Maar nu niet verder lezen. Eerst zelf proberen.

Zie figuur 3. Omdat *BE* hoogtelijn is, geldt $\angle BEA = 90°$. De hoek *JEN* tussen de raaklijnen is ook gelijk aan 90° als we kunnen aantonen dat $\angle AEN = \angle BEJ$.

figuur 3



Dit lukt als volgt. Stel $\angle EBC = x$. Dan is ook $\angle CEG = x$ en $\angle EFC = x$, want deze omtrekshoeken staan in de grote cirkel op boog *EC*.
Ook geldt: $\angle AEN = \angle CEG = x$; het zijn overstaande hoeken.
En:
$\angle EFH \ (= \angle EFC) = \angle EAH = \angle JEH = x$
Dit zijn omtrekshoeken in de kleine cirkel op boog *EH*.
Deze hoeken zijn in de figuur allemaal met een kruisje (×) gekenmerkt.
Dus geldt: $\angle AEN = \angle BEJ$.
Omdat de som van de hoeken in driehoek *BEC* gelijk is aan 180°, geldt in deze driehoek (met $\angle C = p$): $p + x = 90°$ (of je zegt dat $\angle AEB = p + x = 90°$).
Dus ook $\angle NEJ = p + x = 90°$. Waarmee bewezen is dat *NE* loodrecht staat op *JE*.

Resteert de vraag waarom de oppervlakte van de getekende twee cirkels gelijk is aan de oppervlakte van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*.
Merk eerst op dat *I* (het snijpunt van

middellijn AH met raaklijn EG) het middelpunt is van de kleine cirkel, want AH is middellijn ($\angle AFH = 90°$; *omgekeerde stelling van Thales*).
EN is middellijn (EN staat loodrecht op EJ; *raaklijn loodrecht op straal*).
Zo kan ook worden aangetoond dat J (het snijpunt van BC met de raaklijn in E aan de kleine cirkel) het middelpunt is van de grote cirkel. Het punt J is het midden van BC.

Oppervlakte kleine cirkel = $\pi \cdot EI^2$.
Oppervlakte grote cirkel = $\pi \cdot EJ^2$.
Opgeteld: $\pi \cdot (EI^2 + EJ^2)$.
Omdat EI loodrecht staat op EJ, zou volgens de stelling van Pythagoras (in driehoek EIJ: $EI^2 + EJ^2 = IJ^2$) moeten gelden dat de lengte van IJ gelijk is aan de lengte van de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.
Ook nu niet verder lezen; eerst zelf proberen.

Allereerst de tekening (***zie figuur 4***).

figuur 4



De omgeschreven cirkel van driehoek ABC is erbij getekend, met middelpunt P.
Het verlengde van AH snijdt BC in D. PJ en PR zijn middelloodlijnen en AP snijdt EF in S.
Bewering: Vierhoek $APJI$ is een parallellogram. Hoezo?
Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

De lijn door A en I gaat door H en is dus hoogtelijn in driehoek ABC; dus staat AI loodrecht op BC.
PJ is middelloodlijn van BC; dus staat PJ loodrecht op BC.
Uit beide voorgaande regels volgt:
$AI \,//\, PJ$ (1)
$\angle APB = 2 \cdot \angle ACB = 2p$ (*middelpunts- en omtrekshoek op boog AB*).
Dus: $\angle APR = p$.
In vierhoek $PRFS$ passen we de hoekensom toe:
$p + 90° + (90° + x) + \angle FSP = 360°$. Met $x + p = 90°$ geeft dit: $\angle FSP = 90°$. Dus:
FE ($\equiv FS$) staat loodrecht op AP (2)
Van de twee eerste cirkels is IJ de verbindingslijn van de middelpunten. En deze lijn staat, zoals alom bekend, loodrecht op de gemeenschappelijke koorde EF. Dus:
FE staat loodrecht op IJ (3)
Uit (2) en (3) volgt: $AP \,//\, IJ$ (4)
En met (1) en (4) blijkt dat $APJI$ een parallellogram is. Dus: $AP = IJ$.
Hiermee is ook het tweede deel van de opgave bewezen.



figuur 5



figuur 6



figuur 7

Bron
Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur
Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

Naschrift bij "de oude doos"

[Dick Klingens]

Twee cirkels snijden elkaar loodrecht (en wel per definitie) *indien de raaklijnen in een snijpunt van die cirkel loodrecht op elkaar staan*, of ook, als gevolg daarvan, *indien de stralen naar een snijpunt loodrecht op elkaar staan.*

De eerste in de 1931-opgave gestelde eigenschap (in Ton's Oude doos) kan ook worden bewezen op basis van bovenstaande definitie ***(zie figuur 5)***.

Het middelpunt van de omcirkel van de koordenvierhoek *AEHF* is het midden *I* van *AH*.
Het middelpunt van de omcirkel van de koordenvierhoek *BFEC* is het midden *J* van *BC*.
In de 'Thales-driehoek' *AHE* is dan, wegens $AI = EI$, $\angle IAE = \angle IEA = x$.
In de 'Thales-driehoek' *BCE* is dan, wegens $JC = JE$, $\angle JCE = \angle JEC = p$.
In de rechthoekige driehoek *ADC* zien we dat $p + x = 90°$. Dus is ook, rond het punt *E*, $\angle IEJ = 90°$.

Dat de lengte van het lijnstuk *IJ* gelijk is aan de straal *R* van de omcirkel van driehoek *ABC*, kunnen we eveneens op een iets andere manier aantonen. We gebruiken daarbij de (wellicht niet zo bekende) eigenschap in een driehoek:

(*)… *De afstand van het middelpunt van de omcirkel van een driehoek tot een zijde is gelijk aan de helft van de lengte van het 'bovenste stuk' van de hoogtelijn op die zijde* ***(zie figuur 6)***.

Is *P* het middelpunt van de omcirkel van driehoek *ABC*, dan valt de projectie van *P* op *BC* samen met het punt *J* (het midden van *BC*). Zodat:
AI (langs AD) $// PJ$
(Beide lijnen staan loodrecht op de lijn *BC*.)
Volgens eigenschap (*) is dan:
$AI = ½AH = PJ$
En dan is vierhoek *APJI* een parallellogram, zodat inderdaad:
$IJ = AP = R$

Een 'elementair' bewijs van de eigenschap (*) volgt hieronder ***(zie figuur 7)***.

In driehoek *AHE* is $AH = AE / \cos x$.
In driehoek *ADC* is $x = 90° - C$, zodat $\cos x = \sin C$. Dus:
$AH = AE / \sin C$
In driehoek *BJP* is $\angle BPJ = ½\text{bg}(BC) = \angle A$, waarmee de driehoeken *ABE* en *PBJ* gelijkvormig zijn (*hh*; hoek *A* en een rechte hoek).
En dan is:
$AE : PJ = AB : PB = c : R$
of:
$AE = PJ \cdot c / R$
Zodat:
$AH = (PJ \cdot c) / (R \cdot \sin C)$
Volgens de (uitgebreide) *sinusregel* in driehoek *ABC* volgt dan, met $c / \sin C = 2R$:
$AH = (PJ \cdot 2R) / R = 2PJ$

Opmerking. Voor een bewijs van (*) waarbij gebruik gemaakt wordt van een vermenigvuldiging, zie bijvoorbeeld:
» Dick Klingens (2007): *Over de lengte van OH, OZ en OI in een willekeurige driehoek*. Dit artikel is digitaal (als PDF-bestand) beschikbaar via:
www.pandd.nl/downloads/ohoz.pdf
De bedoelde eigenschap is in dat artikel geformuleerd als Lemma 2.

Over de auteur
Dick Klingens is werkzaam aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Daarnaast is hij eindredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*

Mededeling / Nederlands team wint met overtuiging eerste BxMO



Tijdens de Benelux Wiskunde Olympiade 2009 (BxMO) heeft het Nederlandse team van 10 scholieren hun tegenstanders België en Luxemburg ruim verslagen. De top drie van het individuele klassement werd gevuld door Nederlanders.
De eerste Benelux Wiskunde Olympiade is van 8 t/m 10 mei gehouden in Bergen op Zoom (zie verder ook *http://wiskundeolympiade.nl/bxmo*).
Gastland Nederland werd met 119 punten eerste in het officieuze landenklassement, gevolgd door België met 87 punten en Luxemburg met 63 punten. In totaal namen 30 getalenteerde leerlingen uit de drie Beneluxlanden deel aan deze olympiade. Ze kregen vier moeilijke wiskundige opgaven (maximale score 28 punten in totaal) voorgelegd, die ze individueel moesten oplossen.
De resultaten van de Nederlandse deelnemers zijn als volgt:

- Raymond van Bommel (17 jaar, Hoofddorp): goud, 28 punten
- Wouter Berkelmans (18 jaar, Amstelveen): goud, 24 punten
- Maarten Roelofsma (18 jaar, Apeldoorn): zilver, 17 punten
- Jelle van den Hooff (17 jaar, Amstelveen): brons, 10 punten
- David Kok (16 jaar, Delft): brons, 10 punten
- Harm Campmans (16 jaar, Borne): 7 punten
- Wadim Sharshov (18 jaar, Leiden): 7 punten
- Jaap Wagenaar (16 jaar, Woubrugge): 7 punten
- Peter Koymans (16 jaar, Eindhoven): 6 punten
- Madelon de Kemp (16 jaar, Nijmegen): 3 punten

Veel van deze leerlingen zullen komende zomer meedoen met de Internationale Wiskunde Olympiade in Bremen (Duitsland).
In 2011 is Nederland gastland voor de 52ste Internationale Wiskunde Olympiade.

Bron
Nieuwsbericht Wiskunde Persdienst van 12 mei 2009 (*www.wiskundepersdienst.nl*)

Reken VOort

DE ONTWIKKELING VAN REKENPROGRAMMA'S VOOR VMBO 3/4 EN HAVO 4/5

[Gert de Kleuver]

Reken VOort

In het najaar van 2008 heeft het bestuur van de NVvW een aanvraag ingediend bij het ministerie van OCW voor twee projecten: 'Rekenen in vmbo 3/4' en 'Rekenen in het profiel C&M havo'. Beide aanvragen zijn gehonoreerd en in december 2008 zijn de voorbereidingen getroffen om een goede start te kunnen maken met de projecten in januari 2009. U las daarover onder andere in de *WiskundE-brief*. Inmiddels kunt u via de site van de vereniging de werkzaamheden volgen. Onder de link 'Werkgroepen' vindt u de projecten onder de projectnaam *Reken VOort*.

Uit de aanvraag van de projecten

Project Rekenen in het profiel C&M havo

Probleemstelling – Veel havo-leerlingen in het profiel C&M opteren voor een studie aan de pabo. Vanaf 2007 is wiskunde voor dit profiel echter niet meer een verplicht. Het ontbreken van reken- en wiskunde-onderwijs in de twee laatste jaren van de havo zal voor deze leerlingen een natuurlijke drempel opwerpen voor studie-succes aan de pabo, maar ook voor andere studierichtingen, zoals hbo-v, waarvoor de nodige rekenvaardigheid vereist is.
Oplossingsrichting – Het voorstel is een rekenprogramma te ontwikkelen, tenminste toegesneden op de pabo, en bijbehorende SE-toetsing, om de hierboven genoemde drempel te verlagen. De materialen van dit programma sluiten aan bij de referentie-niveaus voor rekenen van de commissie Meijerink. Dit pakket zou mogelijk binnen het vrije deel van het profiel C&M kunnen worden gekozen door leerlingen die geen wiskunde meer volgen. Afhankelijk van beschikbare docenttijd kan het materiaal onder begeleiding van een docent of anders voornamelijk in zelfstudie worden doorgewerkt.
Organisatie – In overleg met vervolg-opleidingen, met name de pabo, worden wensen en eisen ten aanzien van rekenvaardigheden geïnventariseerd. Op basis daarvan, en met inachtneming van de referentieniveaus zoals geformuleerd door de commissie Meijerink (d.w.z. niveau 3F), wordt een leergang rekenen voor 4/5-havo ontwikkeld die een goede voorbereiding garandeert op onder andere een vervolg-studie aan de pabo.
Kwaliteitsbewaking – Deze wordt, inclusief evaluatie van de opbrengst, georganiseerd door het bestuur van de NVvW. Na gebleken kwaliteit kan introductie van het rekenmateriaal op landelijk niveau plaatsvinden. De beoogde looptijd is van november 2008 tot juni 2010.

Hieronder volgt een schets van de onderwerpen.

Onderwerp	Typering
Getallen	Dit subdomein heeft al veel aandacht gekregen en betreft zowel het getalbegrip (bijv. het decimale positiestelsel) als de bewerkingen met getallen. Deze kennis zal onderhouden moeten worden en weer geactualiseerd (schattend rekenen, gebruik rekenmachine) en geautomatiseerd.
Verhoudingen	Dit subdomein omvat zowel conceptuele als toepassingsproblemen. Verhoudingsproblemen vragen vaardigheden en inzicht op diverse terreinen van het rekenen (o.a. breuken en procenten).
Meten en meetkunde	In dit subdomein gaat het vooral om het leren en onderhouden van het meten met diverse instrumenten en het rekenen met diverse dimensies.
Verbanden	Het gaat hier o.a. om het bestuderen van kwantitatieve informatie met behulp van grafieken en diagrammen.

Het rekenprogramma zal aan de genoemde vier onderwerpen aandacht besteden en ze op een evenwichtige manier gedurende de laatste twee jaar van de havo aan de orde stellen. Hiermee willen we de samenhang tussen de onderwerpen en een stevige verankering van de beoogde kennis en vaardigheden waarborgen.

Project Rekenen in vmbo 3/4

Probleemstelling – In twee sectoren van het vmbo (Zorg & Welzijn en Economie) is er geen verplichting om het vak wiskunde te volgen in de leerjaren 3 en 4. In totaal blijkt ongeveer 20% van de vmbo-leerlingen geen eindexamen in wiskunde te doen. Dit percentage is in alle leerwegen ongeveer gelijk; de betreffende leerlingen zijn allen afkomstig uit de twee bovengenoemde sectoren. Het zo vroeg laten vallen van het vak wiskunde betekent dat er ook geen systematische aandacht meer wordt besteed aan het onderhouden van het rekenen of aan het ontwikkelen van gecijferdheid. Hierdoor lopen deze leerlingen een achterstand op ten opzichte van hun mede vmbo-leerlingen. Deze achterstand manifesteert zich zowel tijdens leerjaar 3 en 4 van het vmbo als bij instroom in het mbo (of havo). Het onvermogen reken-vaardigheid functioneel in te zetten komt op school tot uiting bij andere vakken en opdrachten. Met name beroepsgerichte vakken doen vaak een beroep op het kunnen gebruiken van een breed scala aan basale rekenvaardigheden. Ook in de sectoren Zorg en Welzijn en Economie is dat het geval, bijvoorbeeld bij het rekenen met verhoudingen en maten (Zorg en Welzijn) en bij procenten (Economie).
Oplossingsrichting – Aansluitend bij aanbevelingen van de commissie Meijerink stellen we voor een zinvol en betekenisvol rekenprogramma voor de leerjaren 3 en 4 van de genoemde vmbo-sectoren te ontwikkelen, in relatie tot het beroeps-gerichte programma. Daarbij wordt aangesloten op het rekenen dat in klas 1 en 2 aan bod is geweest en op het niveau dat de leerlingen daar bereikt hebben, zodat

een doorgaande leerlijn ontstaat. Concreet zal het gaan om het ontwikkelen van vier modules.
Verder wordt afstemming gezocht met het raamwerk rekenen/wiskunde mbo, zoals dat nu in ontwikkeling is, vanwege de voorbereiding op vervolgtrajecten.
Het rekenprogramma leidt ertoe dat deze leerlingen het door de expertgroep voorgestelde burgerschapsniveau 2F halen. Het programma zal zo worden uitgewerkt dat het ingepast kan worden in het onderwijs binnen het beroepsgerichte programma, of dat het daarbij kan ‘aanhaken’, bijvoorbeeld in de vorm van steunlessen rekenen/wiskunde. Het programma omvat ook voorstellen voor toetsing en suggesties hoe dit binnen schoolexamens van andere vakken en het Centraal Schriftelijk (Praktijk) Examen, het CS(P)E, van de beroepsgerichte vakken kan plaatsvinden.
Bij de uitwerking zal een handreiking voor de docenten worden ontwikkeld, zodat met name niet-reken/wiskundedocenten zicht hebben op de bij rekenen/wiskunde gebruikelijke aanpakken.
Modules – Heel concreet zal worden gewerkt aan een viertal modules, analoog aan de vier domeinen die in het rapport van Meijerink worden onderscheiden.

Module	Typering
Getallen	Dit subdomein krijgt al veel aandacht in het basisonderwijs en betreft daar zowel het getalbegrip als de bewerkingen met getallen. In alle vervolgonderwijs zal de verworven kennis moeten worden onderhouden en steeds weer geactualiseerd en geautomatiseerd.
Verhoudingen	Dit subdomein omvat veel (maatschappelijke) toepassingsproblemen, want het gebruiken van een kennisbasis uit rekenen/wiskunde betreft vaak verhoudingsproblemen waarvan het oplossen kennis, vaardigheden en inzicht vraagt op diverse terreinen van het rekenen.
Meten en meetkunde	Aan de beide subdomeinen wordt in het basisonderwijs de nodige aandacht besteed. Beide lopen ook door in het voortgezet onderwijs, waarbij de meetkunde in havo/vwo de meeste aandacht krijgt.
Verbanden	Het gaat hier o.a. om het bestuderen van grafieken en diagrammen die numerieke gegevens uit tabellen visualiseren of het verband tussen twee grootheden of hoeveelheden.

Er zullen varianten gemaakt worden voor Zorg&Welzijn en voor Economie. Elke module zal bestaan uit:

- lesstof voor leerlingen voor de omvang van ongeveer 10 lesuren. Hoofdzakelijk zal dit schriftelijk materiaal zijn, maar alle materiaal zal ook toegankelijk worden gemaakt via een website (die volgens vaste standaards is ingericht voor optimale terugvindbaarheid) en er zullen interactieve elementen in verwerkt zijn;
- een handreiking voor de docent;
- één voorbeeld van een toetsitem per module.

De modules worden zo ingericht dat ze gedurende het derde en vierde leerjaar zullen worden gebruikt.
Organisatie – Op grond van de beschikbare documenten (adviezen commissie Meijerink, raamwerk rekenen/wiskunde mbo, rekendomein uit examenprogramma vmbo, examenprogramma’s beroepsgerichte vakken, rekenen in de onderbouwboeken) zullen in samenspraak met docenten rekenen/wiskunde, docenten beroepsgerichte vakken en docenten uit vervolgtrajecten eisen en wensen voor het programma worden geïnventariseerd. Daarnaast wordt vastgesteld wát, en op welk niveau, leerlingen aan het eind van 2-vmbo op het gebied van rekenen hebben gehad. Op basis hiervan wordt het rekenprogramma ontworpen en worden lesmaterialen en bijbehorende toetsing ontwikkeld.
Kwaliteitsbewaking – Deze wordt, inclusief evaluatie van de opbrengst, georganiseerd door het bestuur van de NVvW. Na gebleken kwaliteit kan introductie van het rekenmateriaal op landelijk niveau plaatsvinden.

In volle gang

In januari 2009 zijn er voor beide projecten informatiemiddagen op het Freudenthal Instituut geweest. De docenten die mee willen schrijven aan de modules, zijn inmiddels bezig. Voor het einde van schooljaar 2008-2009 moet een en ander al ontwikkeld zijn om het materiaal uit te kunnen proberen bij de pilotscholen tijdens het schooljaar 2009-2010. Er moet op korte termijn door het bestuur van de NVvW een besluit genomen worden over de wijze waarop het materiaal beschikbaar gesteld wordt voor iedereen. Tijdens het laatste overleg op het ministerie bleek dat men dit via internet of door middel van boekjes tegen kostprijs zou willen doen.
Volgend schooljaar hoop ik u nader te informeren en in de tussentijd zullen we het ontwikkelde materiaal op de website plaatsen (zie *www.nvvw.nl* en dan doorklikken naar Werkgroepen | Reken VOort).

Over de auteur
Gert de Kleuver is projectleider RekenVOort en afdelingsleider aan het Ichthus College in Veenendaal.
E-mailadres: *g.de.kleuver@gmail.com*

Zwakke sleutels bij het RSA-cryptosysteem

DEEL 2

[Benne de Weger]

Wat vooraf ging
Dit is het tweede en laatste deel van een artikel over zwakke RSA-sleutelparen[1]. Zwakke sleutelparen zijn sleutelparen waarvan het geheime deel makkelijk te kraken is omdat bepaalde parameters op een onhandige manier gekozen zijn. In deel 1 is uitgelegd hoe en waarom het RSA-cryptosysteem werkt en is een klasse van zwakke sleutels aangewezen, gebaseerd op de factorisatiemethode van Fermat. De conclusie was dat een RSA-sleutelpaar zwak is als de priemfactoren van de modulus te dicht bij elkaar liggen.
In dit tweede deel bespreken we een andere klasse van zwakke sleutels, namelijk die waarbij de privé-exponent *te klein* gekozen is. In dit deel speelt het uitgebreide algoritme van Euclides weer een belangrijke rol. Voor het gemak van de lezer herhalen we hier dit algoritme, en vermelden we nog eens kort hoe een RSA-sleutelpaar er uitziet. Voor meer achtergrond en voorbeelden kunt u terecht in de paragrafen 2 en 3 van deel 1 van dit artikel[1].

Het uitgebreide algoritme van Euclides berekent de grootste gemene deler ggd(a, b) van de (gehele) getallen a en b, samen met de gehele coëfficiënten u en v zodat $d = ua + vb$; ***zie figuur 1*** op pagina 308.
Een RSA-sleutelpaar bestaat uit een publieke sleutel (n, e) en een privé-sleutel (n, d). Hierbij is de modulus n een groot getal dat is opgebouwd uit twee priemfactoren p en q, dus $n = pq$. De samenhang tussen de publieke en de privé-sleutel wordt gegeven door de relatie $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$ voor de publieke exponent e en de privé-exponent d. Hierbij is $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.

7. De methode van Wiener voor het achterhalen van de privé-exponent
In paragraaf 6 van deel 1 zagen we een methode om zwakke sleutels voor RSA te identificeren, die uitsluitend gebruik maakt van de modulus. Nu bekijken we een andere methode, die zich niet in eerste instantie op de modulus richt, maar op de privé-exponent d. Als die niet goed gekozen is, is het sleutelpaar ook niet veilig. We laten zien dat dan de privé-exponent d te achterhalen is, en dat ook in dit geval de ontbinding van de modulus makkelijk berekend kan worden.
Het is aantrekkelijk voor bouwers van RSA-software om d klein te willen hebben. De snelheid van het ontsleutelen hangt namelijk sterk van de grootte van d af. Maar een te kleine waarde voor d is niet goed. Een heel kleine d is te raden door eenvoudig alle mogelijkheden af te gaan. In de praktijk betekent dit dat men $d > 2^{80}$ wil hebben, want dan is hij zelfs met heel veel rekenkracht niet in redelijke tijd te achterhalen door alle mogelijkheden uit te proberen. Dus d zal minstens 80 bits moeten hebben, maar men wil soms wel aanzienlijk minder dan s (vaak 1024) bits bereiken. We laten zien dat te kleine d (maar *wel* groter dan 80 bits) niet veilig is.
We roepen de relatie tussen d en e in herinnering:
$ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$
Dus $ed = 1 + k \cdot \phi(n)$ voor een positieve gehele k. Ook k is (als het goed is) onbekend voor de kraker.
Michael Wiener heeft in 1990 laten zien hoe je uit deze relatie de breuk k/d kunt vinden als d niet al te groot is. De relatie laat zien dat k/d heel dicht bij $e/\phi(n)$ ligt, immers:

$$\frac{e}{\phi(n)} - \frac{k}{d} = \frac{ed - k\cdot\phi(n)}{d\cdot\phi(n)} = \frac{1}{d\cdot\phi(n)}$$

Het probleem (voor de kraker) is dat $\phi(n)$ niet bekend is. Wiener's idee maakt nu gebruik van het feit dat de onbekende $\phi(n)$ en de bekende n vrij dicht bij elkaar liggen. Immers:
$\phi(n) = (p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = n - (p + q - 1)$
waarbij p en q allebei van de grootteorde van $\sqrt{n}$ zijn. Dus $\phi(n)$ is n min iets dat veel kleiner is. Ongeveer de bovenste helft van de cijfers van $\phi(n)$ is gelijk aan die van n.
Nu volgt:
$ed - kn = (ed - k\cdot\phi(n)) + k\cdot(\phi(n) - n) = 1 - k(p + q - 1)$
en dus:

$$\frac{e}{n} - \frac{k}{d} = \frac{1 - k(p+q-1)}{nd}$$

Dit ligt echt dicht bij 0, zoals we zo dadelijk in detail zullen aantonen. Het interessante is dat e/n een volledig bekende breuk is, en k/d een nog onbekende breuk er vlakbij, maar met veel kleinere teller en noemer dan e/n. Een techniek om zulke breuken k/d te vinden bestaat; daarover zullen we zo ook iets zeggen.
Maar eerst de afschatting voor $e/n - k/d$.
Uit $2 < e < \phi(n)$ en $ed = 1 + k\cdot\phi(n)$ volgt:

$$k = \frac{ed-1}{\phi(n)} < \frac{ed}{\phi(n)} < d$$

Uit $ed - kn = 1 - k(p + q - 1)$ volgt dan:

$$\left|\frac{e}{n} - \frac{k}{d}\right| < \frac{k(p+q-1)}{nd} < \frac{p+q}{n}$$

Omdat p en q evenveel bits hebben, geldt:
$q < p < 2q$
Met $pq = n$ volgt nu dat:
$\sqrt{n} < p < \sqrt{(2n)}$
Uit $pq = n$ volgt $q = n/p$. Dus:
$p + q = p + n/p$.
De functie $f(p) = p + n/p$ heeft op het interval $[\sqrt{n}\,;\sqrt{(2n)}]$ haar maximum bij $p = \sqrt{(2n)}$; dus is:

$$f(p) \le \sqrt{(2n)} + \frac{n}{\sqrt{(2n)}} = (\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})\cdot\sqrt{n} < 2{,}13\sqrt{n}$$

Zodat $p + q < 2{,}13\sqrt{n}$.
Voor de afschatting van de twee breuken levert dit op:

$$\left|\frac{e}{n} - \frac{k}{d}\right| < \frac{p+q}{n} < \frac{2{,}13}{\sqrt{n}}$$

En dat is inderdaad heel klein.

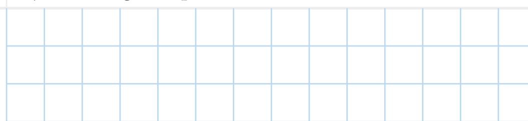
Nu resteert de vraag hoe je bij een gegeven breuk A/B (alle) andere breuken a/b kunt vinden met veel kleinere teller en noemer, zodat $|A/B - a/b|$ heel klein is. De theorie van de *kettingbreuken* vertelt hoe je de breuken a/b met:

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$$

kunt bepalen (zie het onderstaande voorbeeld). Om dit in ons geval te kunnen gebruiken wil je zeker weten dat:

$$\frac{2{,}13}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2d^2}$$

Dat is zo als $d < 0{,}8\, n^{1/4}$.
Bij een veiligheidsparameter van $s = 1024$



betekent dit dat de privé-exponent d dus niet minder dan ongeveer ¼s = 256 bits mag hebben. En daarmee hebben we een nieuwe categorie zwakke sleutels van RSA opgespoord, namelijk die waarbij de privé-exponent d niet groter is dan ongeveer $n^{1/4}$.

Hoe werkt dat kettingbreukalgoritme? Dat is eigenlijk niets anders dan het uitgebreide algoritme van Euclides voor het bepalen van de grootste gemene deler van de teller A en de noemer B. We laten dit zien aan de hand van een eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld

Neem $A = 62$, $B = 23$. Het gehele deel van 62/23 is 2, en de rest is 16; dus:
62/23 = 2 + 16/23
Merk op dat we vinden dat 16 een lineaire combinatie van 62 en 23 is, namelijk
16 = 62 – 2 × 23.
De laatste breuk 16/23 draaien we nu om, en we doen er hetzelfde mee: 23/16 = 1 + 7/16, en 7 = 23 – 16.
Dit laatste kunnen we terugrekenen tot een lineaire combinatie van de oorspronkelijke 62 en 23:
7 = 23 – (62 – 2 × 23) = -62 + 3 × 23
En opnieuw: de restbreuk 7/16 draaien we om: 16/7 = 2 + 2/7, en:
2 = 16 – 2 × 7 = (62 – 2 × 23) – 2 × (-62 + 3 × 23) = 3 × 62 – 8 × 23
Enzovoorts.
We zetten de gevonden lineaire combinaties van 62 en 23 nog eens op een rijtje:

16 =	1	× 62 +	–2	× 23
7 =	–1	× 62 +	3	× 23
2 =	3	× 62 +	–8	× 23
1 =	–10	× 62 +	27	× 23

De oorspronkelijke breuk 62/23 kunnen we aan de hand hiervan als volgt schrijven:

$$\frac{62}{23}=2+\frac{16}{23}=2+\frac{1}{\frac{23}{16}}=2+\frac{1}{1+\frac{7}{16}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{16}{7}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{7}}}$$

Zo kunnen we doorgaan. Met een handiger notatie – iedere keer ‘$+\frac{1}{\dots}$’ vervangen door een komma – wordt het:

$$\frac{62}{23}=[2,\tfrac{23}{16}]=[2,1,\tfrac{16}{7}]=[2,1,2,\tfrac{2}{7}]$$
$$=[2,1,2,3,\tfrac{1}{2}]=[2,1,2,3,2]$$

Hier houdt het op. Vervolgens laten we de ‘staartstukken’ die kleiner dan 1 zijn, telkens weg om benaderingsbreuken van 62/23 te krijgen:

$$\frac{62}{23}\approx[2]=\frac{2}{1},\qquad \frac{62}{23}\approx[2,1]=\frac{3}{1},$$
$$\frac{62}{23}\approx[2,1,2]=\frac{8}{3},\qquad \frac{62}{23}\approx[2,1,2,3]=\frac{27}{10}$$

De coëfficiënten van de lineaire combinaties (2,1), (3,1), (8,3), (27,10) komen precies weer terug in de benaderingsbreuken.

De stelling van Legendre uit de theorie van de kettingbreuken zegt nu dat iedere vereenvoudigde breuk a/b met $a < A$ en $b < B$ die voldoet aan:

$$\left|\frac{A}{B}-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{2b^2}$$

altijd te vinden zal zijn als benaderingsbreuk met het kettingbreukalgoritme. Het bewijs van deze stelling is wat lastiger. Voor meer over kettingbreuken kunt u het boek van Beukers[2] raadplegen.
We sluiten af met een voorbeeld met wat grotere getallen.

Voorbeeld

We nemen:
n = 3 100 970 273 en e = 1 234 322 263
De kettingbreuk e/n begint met:
[0, 2, 1, 1, 19, 1, …]
Dat levert de volgende benaderingsbreuken op:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{39}{98},\ \frac{41}{103},\ \dots$$

Die breuken kunnen we zien als kandidaten voor k/d. Zo'n kandidaat testen we door te kijken of $ed - 1$ deelbaar is door k, en of de resulterende $R = (ed - 1)/k$ wel dicht genoeg bij n ligt om $\phi(n)$ te kunnen zijn:

k	d	R	conclusie
1	2	2 468 644 525	ligt te ver van n
1	3	3 702 966 788	ligt te ver van n
2	5	3 085 805 657	ligt te ver van n
39	98	120963581773/39	is niet eens geheel
41	103	3 100 858 368	dit lijkt een mooie kandidaat

De laatste kandidaat gaan we verder testen.
Als $\phi(n)$ = 3 100 858 368, dan is:
$p + q = n + 1 - \phi(n)$ = 111 906
En we weten natuurlijk ook dat:
$pq = n$ = 3 100 970 273
Twee getallen vinden waarvan som en product bekend zijn, doen we met de *abc*-formule. Dat levert:
p = 61 409 en q = 50 497
En inderdaad zijn deze geheel.

Hiermee hebben we dus niet alleen d gevonden maar meteen ook een ontbinding in factoren van n.

Terzijde. *We hebben zojuist in feite gezien dat het ontbinden van n makkelijk is als we, naast e, zowel d als k weten. Als we alleen d hebben, en niet k, dan is het ontbinden van n wat lastiger, maar het kan wel. Voor het ontsleutelen van geheimschriften is kennis van d (en natuurlijk n) voldoende.*

De conclusie van deze paragraaf is dat je bij het maken van een RSA-sleutelpaar ook niet de fout moet maken de privé-exponent d te klein te kiezen, zeker flink groter dan $n^{1/4}$, want anders levert ook dat een erg zwakke sleutel op.

8. Slotopmerkingen

In dit artikel hebben we laten zien dat er enkele categorieën zwakke sleutels zijn bij het RSA-cryptosysteem. We hebben ons daarbij beperkt tot die categorieën waarvan het met elementaire getaltheorie in te zien is waarom ze zwak zijn.
Er zijn wel meer zwakke sleutels bekend. Voor iedere N zijn er ongeveer $N/(\log N)^2$ RSA-moduli $n = pq$ die kleiner dan N zijn, en het is bekend dat er daarvan ten minste $N^{3/4}$ zwak zijn. Dat lijkt in absolute zin veel, maar relatief gezien is het slechts 1 op de $N^{1/4}/(\log N)^2$, dus nog altijd bijna niets.
Om nog een voorbeeld te noemen. Het hierboven behandelde resultaat van Wiener dat de sleutels met $d < n^{1/4}$ zwak zijn, is verbeterd (of, zo u wilt, verslechterd) tot $d < n^{0{,}292}$, en vermoed wordt dat alle $d < \sqrt{n}$ wel eens zwak zouden kunnen blijken. Recente bijdragen tot, en een overzicht van deze en uitgebreidere theorieën, waarbij ook gekeken is naar hoeveel informatie je over een sleutel prijs moet geven om hem helemaal te kunnen kraken, zijn te vinden in het proefschrift van Ellen Jochemsz[3].
Er zijn wel andere manieren om RSA aan te vallen. De beste nu bekende methoden om grote getallen in factoren te ontbinden zijn de getallenlichamenzeef (Number Field Sieve), en een methode gebaseerd op elliptische krommen. In feite zijn dat slimmere manieren om n te schrijven als verschil van twee kwadraten. Nederlandse wiskundigen als de broers Hendrik en Arjen Lenstra (hoogleraar in Leiden resp. Lausanne) hebben bij het ontwikkelen van deze methoden een belangrijke rol gespeeld.
RSA kan ook zonder ontbinden in factoren aangevallen worden. Er zijn allerlei aanvallen mogelijk die niet zozeer ingrijpen op de getaltheoretische achtergrond, maar op de manier waarop RSA gebruikt wordt of geïmplementeerd is in software of hardware.
RSA als zodanig is veilig en niet gekraakt. Maar om RSA echt veilig in te zetten moet er wel heel wat meer gebeuren dan het kiezen van grote priemgetallen. Dat hebben we in dit artikel willen illustreren aan de hand van twee voorbeelden.

Verwijzingen

[1] Het eerste deel van dit artikel staat in *Euclides* 84(7), pp. 256-260.
[2] Frits Beukers (1999): *Getaltheorie voor beginners*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Invoer: twee positieve gehele getallen a, b
Uitvoer: $d = ggd(a, b)$, en u, v zodat $d = ua + vb$

$d_{nieuw} := a$; $d := b$; $u_{nieuw} := 1$; $u := 0$; $v_{nieuw} := 0$; $v := 1$

Herhaal
- Bereken het gehele deel q van d_{nieuw} / d, en de rest r
- Als de rest $r \neq 0$:
  - Dan
    - vervang d_{nieuw} door $(d_{nieuw} - qd)$; verwissel dan d en d_{nieuw}
    - vervang u_{nieuw} door $(u_{nieuw} - qu)$; verwissel dan u en u_{nieuw}
    - vervang v_{nieuw} door $(v_{nieuw} - qv)$; verwissel dan v en v_{nieuw}
    - en ga door (met herhalen)
  - Anders
    - Stop (de herhaling)

Druk af: d, u, v

figuur 1 Uitgebreide algoritme van Euclides

Zie *www.epsilon-uitgaven.nl/E42.php* .

[3] Ellen Jochemsz (2007): *Cryptanalysis of RSA variants using small roots of polynomials*. Proefschrift, TU Eindhoven.
Zie *http://alexandria.tue.nl/extra2/200711750.pdf* .

Over de auteur

Benne de Weger werkt als universitair docent cryptologie aan de Technische Universiteit Eindhoven.
E-mailadres: *b.m.m.d.weger@tue.nl*

Oproep / Is een verhouding wel of niet hetzelfde als een breuk?

[Hessel Pot]

In ons gangbare spraakgebruik hanteren we het woord 'verhouding' in verschillende betekenissen; we denken misschien te weten wat we bedoelen, maar is dat ook zo? Hessel Pot houdt zich al jaren met deze materie bezig. Het is hem een doorn in het oog dat in schoolboeken de woorden 'verhouding' en 'breuk' vaak alleen lijken te slaan op bepaalde notatievormen zonder dat duidelijk gemaakt wordt naar welke betekenisinhouden die vormen verwijzen.
Hij roept u op om hem een gemotiveerd antwoord te sturen op de titelvraag. De redactie zal graag plaats inruimen voor artikelen met nieuwe gezichtspunten in deze kwestie.

Verhouding en Breuk

De vraag of een *verhouding* hetzelfde is als een (positieve) *breuk*, komt af en toe aan de orde in discussies over reken onderwijs. Met daarop aansluitend, ingeval er een verschil wordt gezien, de vraag wáár dat onderscheid 'm dan precies in zit. Een gemotiveerd antwoord op die vragen komt echter zelden of nooit boven tafel. Heb ik althans in leerboeken of elders nog nooit ergens op papier zien staan. Is dat niet uiterst merkwaardig?
Als je erop gaat letten, dan zie je enerzijds dat er in alle huidige brugklasboeken naast secties over dingen die *breuken* genoemd worden, een aparte sectie voorkomt over dingen die *verhoudingen* genoemd worden. En in het leerplan (de 'kerndoelen') staan leerdoelen met betrekking tot *breuken*, naast leerdoelen met betrekking tot *verhoudingen*; die twee termen zijn daar beslist niet synoniem. Anderzijds, als je in boeken over rekenkunde zoekt naar een beschrijving van het verschil tussen de inhoud van die termen, dan staat daar vaak leukweg: die woorden betekenen eigenlijk hetzelfde. Of er wordt gezegd dat het verschil alleen zit in de notatie, de manier van opschrijven. Een verhouding zou met een dubbelepunt tussen de beide leden op één regel geschreven moeten worden, en een breuk met een horizontale breukstreep tussen teller en noemer.
Snapt u dit? Ik niet. Want bij het kiezen tussen beide notatievormen moet je kennelijk al weten of je een aanduiding zoekt voor een verhouding of voor een breuk. Dus toch wél een inhoudelijk verschil!
Het bij veel pabo's als leidraad gebruikte boek 'Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen', in 2005 geschreven door het TAL-team van het Freudenthal Instituut, zegt over deze kwestie alleen (pag. 27): *'Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen zijn verschillende beschrijvingen van iets wat we in zekere zin als hetzelfde kunnen beschouwen.'*
Punt. Wat de lezer van deze zin zich bij het woordje 'iets' gedacht wordt voor te stellen, blijft onbesproken. En het 'in zekere zin' draagt mijns inziens ook niet bij aan grotere duidelijkheid. Ik heb van auteurs van dit boek begrepen dat zij het, gezien de beoogde lezersgroep, niet relevant vonden om op eventuele betekenisverschillen tussen de vier vakwoorden uit de titel in te gaan.

Zou de betekenis kunnen variëren?

Het zou kunnen – het lijkt me zelfs zeer waarschijnlijk – dat de woorden verhouding en breuk in de reken- en wiskundeles in meer dan één betekenis gebruikt worden. Maar welke betekenissen zijn dat dan? En met welke toevoegingen kan de docent (en het leerboek) duidelijk maken welke betekenis op een bepaalde plaats aan de orde is?
Frappant vind ik de situatie dat in boeken over de theorie van de rekenkunde zonder uitzondering gesteld wordt dat je uitsluitend van een verhouding kunt spreken, als het gaat om de verhouding van twee *gelijk*soortige grootheden ('éénsoort-verhoudingen'). Maar dat het daarnaast in de schoolboeken – en ook in de algemene spreektaal – minstens even vaak gaat over verhoudingen van twee *óngelijk*soortige grootheden ('tweesoort-verhoudingen'). Over wat voor dingen heeft een auteur het, als hij schrijft over een prijs-gewicht-verhouding?

Hier geen antwoorden, wel een oproep

U, lezer, zal nu waarschijnlijk verwachten dat ik ga laten zien welke antwoorden er volgens mij te geven zijn op de hierboven geformuleerde vragen. Na flink wat zoek- en tastwerk (zie bijvoorbeeld ***figuur 1***) ben ik ook wel uitgekomen op antwoorden die me aardig lijken te passen bij het feitelijk gebruik dat het onderwijs maakt, van de termen verhouding en breuk. De wat omvangrijk uitgevallen uitleg daarbij lijkt hier echter niet direct op z'n plaats; op aanvraag krijgt u die tekst van mij in uw mailbox.
Wel ben ik er erg benieuwd naar of er lezers zijn die een bondig antwoord kunnen formuleren op de vraag:

- Is een *verhouding* wel of niet hetzelfde als een *breuk*? Zo ja, waarom komen die termen toch naast elkaar voor in leerdoelen en leerboeken; en zo nee, wat is precies hun betekenisverschil.

figuur 1

Hopelijk kunnen zulke reacties er toe bijdragen dat er ooit een eind komt aan de huidige situatie waarin een wiskundedocent en een basisschoolleerkracht nergens kunnen naslaan wat de auteurs van de kerndoelen, van het rapport Meijerink, van alle huidige schoolboeken, van de pabo-leerboeken, van de genoemde TAL-publicatie, et cetera, zich voorstellen bij het betekenisverschil (niet het notatieverschil) tussen de door hen gebruikte termen verhouding en breuk. En idem, tussen verhouding en getal. Terwijl die docenten er toch voor betaald krijgen om die begrippen aan hun leerlingen duidelijk te maken.

Over de auteur

Hessel Pot is een sterk voorstander van het maken van onderscheid tussen de wijze van *aanduiden* van wiskundige begrippen, en de inhoudelijke *betekenis* ervan. Zijn ervaring is echter dat er weinig interesse bestaat om bestaande onderwijstradities op dit punt om te buigen, en dat het niet meevalt om met dergelijke opvattingen een broodheer te vinden.
E-mailadres: *h.n.pot@hetnet.nl*

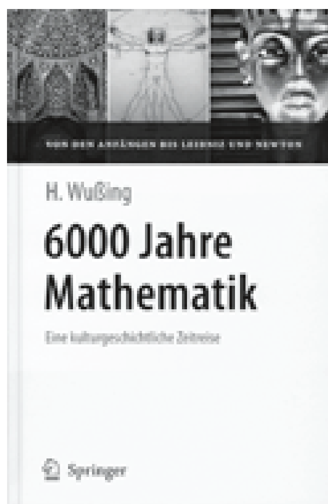
Erratum Euclides 84-7

Op pagina 258 in de rechter kolom staan enkele onjuiste getallen. Van bovenaf geteld:
regel 11 - 120924377 moet zijn: 1209^{24377}
regel 12 - 50624377 moet zijn: 506^{24377}
regel 18 - 167117393 moet zijn: 1671^{17393}
regel 19 - 1294917393 moet zijn: 12949^{17393}.

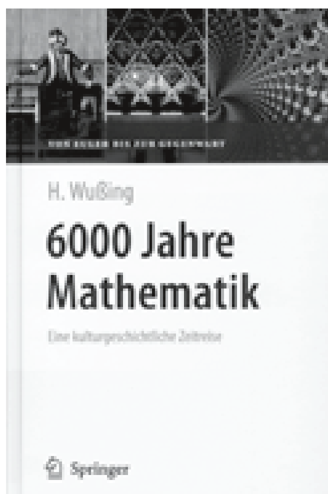
Boekbespreking / 6000 Jahre Mathematik

[Jan Broeders]

Auteur: Hans Wußing
Uitgever: Springer - Verslag (2008/2009)



Ondertitel deel 1: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton
ISBN 978-3-540-77189-0
Prijs: € 29,95 (529 pagina's)



Ondertitel deel 2: Von Euler bis zur Gegenwart
ISBN 978-3-540-77313-9
Prijs: € 29,95 (675 pagina's)

De fascinerende historie van 6000 jaar wiskunde
De opbouw van de wiskunde kenmerkt zich vanaf ruim 4000 jaar voor Christus door een combinatie van de vorming van het mathematisch denken en het formuleren van steeds abstractere begrippen. De ontwikkelingen begonnen in Mesopotamië en Egypte. Bij de oude Grieken vinden we in de periode van 1000 v.Chr. tot 200 n.Chr. namen als Thales, Pythagoras, Archimedes, Apollonius en Diophantos. Ook op andere plekken op aarde vonden er ontwikkelingen plaats op het gebied van de eerste wiskunde.
In een prachtig en zeer boeiend leerboek en vooral leesboek beschrijft Hans Wußing op een voortreffelijke en gedetailleerde wijze over de historische ontwikkelingen van de vroegere mathematica. Zijn bijzondere inspanningen eindigen in dit boek rondom de verhandelingen van de wetenschappers Newton en Leibniz. Zijn tijdreis door de mathematica voorziet hij van mooie kleurrijke foto's, tabellen, tekeningen en illustraties van postzegels. De ontwikkelingen gingen relatief snel en hebben telkens invloed gehad op mens en maatschappij. De auteur heeft oog voor vele delen in de wereld waar de historie van de wiskunde vaak een eigen ontwikkeling doormaakte. Het spannende leesboek is een uitgave voor wiskundigen en voor iedereen met belangstelling voor de wiskunde, zijn beroemde historische achtergronden en de oorspronkelijke en huidige betekenis voor de historische en de moderne ontwikkelde mensen.

Het tweede deel van de tweedelige serie over 6000 jaar wiskunde beschrijft uitgebreid de gebeurtenissen en feiten in de historie van de wiskunde vanaf de activiteiten van Leonhard Euler tot aan de huidige kennis en wetenschap van de moderne wiskunde en praktische toepassing. Ook in het tweede deel wordt de story van de magisch historische en culturele reis door de wiskunde voortgezet met heel veel wetenswaardigheden en een schat aan interessante informatie. Dit deel start met informatie over de stand van zaken in de wiskunde aan

het begin van de 18e eeuw en de geboorte van Leonhard Euler in 1707. Hij ontwikkelde zich als één van de beste wiskundigen in die eeuw en – naar later bleek – één van de knapste wiskundigen van de westerse wereld.
Door de staatkundige situatie in de meeste landen van het Europa van toen was er grote politieke onrust. De auteur geeft een schets van de situatie in vele landen. Ondanks de oorlogen ontwikkelde kunst en cultuur zich enorm. De lezer krijgt een beeld van de ontwikkelingen in de bouwkunst, de schilderkunst, de muziek en de literatuur uit die tijd. Opvallend is het werk van de familie Bernoulli. Drie generaties Bernoulli hebben hun sporen ruim verdiend in de wiskunde. De 18e eeuw kenmerkt zich door de snelle ontwikkelingen in de algebra en getallentheorie en de ontdekking en ontsluiting van nieuwe gebieden in de geometrie. In de 19e eeuw komen deze ontwikkelingen in de industriële revolutie terecht en komen er steeds meer wiskundigen op het toneel van de verklaringen en bewijzen. In het bijzonder beschrijft de auteur uitgebreid over het leven en werk van de wetenschappers en bekende wiskundigen Carl Friedrich Gauss, Abraham De Moivre, Augustin-Louis Cauchy en Daniel Hilbert vanwege hun productiviteit en scheppingskracht en grote verrijking van de mathematica in het algemeen.
In de 20e eeuw heeft men veel problemen kunnen aanpakken door de ontwikkeling van de computer en het effectieve gebruik ervan. Ook kwamen er nieuwe begrippen in de wiskunde. Over de ontwikkelingen van de wiskunde in de toekomst filosofeert Eberhard Zeidler in zijn verhandeling.

Het omvangrijke boek leest als een roman over de strijd voor erkenning van de mathematica als wetenschap. De uitgebreide benadering van de geschiedenis staat borg voor uren, dagen en weken leesplezier en zeker voor het opdoen van kennis over achtergronden en invloeden van de mensen achter deze geschiedenis. De lezer krijgt een beeld van de invloed van de wiskunde op de astronomie, de ontwikkelingen in de getallentheorie, het pad naar de klassieke waarschijnlijkheidsberekening en over de globalisering van de wiskunde sinds het einde van de 19e eeuw. Wetenschappers als Cantor, Zuse en Wiener stimuleerden de wereldwijde ontwikkelingen.
Veel plaatjes van postzegels, plaatjes van personen en vele kleurrijke illustraties maken het geheel nog aantrekkelijker. Het boek bevat een uitgebreide lijst met jaren en namen van personen die met wiskunde te maken hebben. Beide delen mogen niet ontbreken in bibliotheken, archieven, instituten, mathematische opleidingen en in de in het algemeen rijk gevulde boekenkasten van de liefhebbers van de wiskunde en de geschiedenis ervan. De boeken zijn te bestellen bij alle erkende boekenwinkels.

Over de recensent

Jan M. Broeders is voorzitter van de Nederlandse Stichting voor Waarneming & Holografie. Deze stichting stelt zich ten doel het bevorderen van de interesse voor de holografie, de driedimensionale waarneming, optische illusies, anamorfosen en de optische waarneming in het algemeen.
De stichting geeft onder de naam *Optische Fenomenen* een nieuwsbrief uit (zie *www.optische-fenomenen.nl*).
E-mailadres: *of@broeders.nu*

Mededeling / Keuze voor exact vakkenpakket op havo/vwo stijgt fors



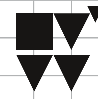
Het stimuleringsprogramma Universum werpt vruchten af
De keuze van leerlingen voor een natuurprofiel op havo/vwo is de afgelopen jaren fors gestegen, zo blijkt uit onderzoek van het Platform Bèta Techniek[1]. Op scholen die participeren in het stimuleringsprogramma Universum Programma[2], stijgt de keuze voor een natuurprofiel harder dan het landelijk gemiddelde.
Op Universumscholen stijgt het aantal leerlingen met een natuurprofiel op de havo ten opzichte van het jaar 2000 met maar liefst 71,2% en op het vwo met 68,6%. Het aantal meisjes op Universumscholen dat ten opzichte van 2000 voor een natuurprofiel kiest, is gestegen met 93%.

Natuurprofiel biedt perspectief
Gebleken is dat Nederland geen gebrek heeft aan bèta-talent onder de havo- en vwo-leerlingen. Wel maken leerlingen vaak een profielkeuze waarmee dit talent niet wordt benut. Inmiddels is een duidelijke stijgende trend ingezet. Niet alleen is er een stijging waar te nemen als het gaat om natuurprofielen, ook de instroom van studenten in de technische richtingen van het hoger onderwijs stijgt met 16,2% ten opzichte van 2000.
Een stijging in leerlingen dat voor exacte richting kiest, is van groot belang. Indien Nederland bij de top van Europa wil behoren als het gaat om innovatie, onderzoek en onderwijs, is het noodzakelijk de in gang gezette positieve trend op havo/vwo-scholen door te zetten. Een kenniseconomie en een kennissamenleving als in Nederland drijft op bètatechnologische kenniswerkers. Het kiezen voor een natuurprofiel biedt daarnaast ook een breed toekomstperspectief voor jongeren. Een natuurprofiel biedt de beste kansen voor alle vervolgopleidingen in Nederland en daarmee ook een brede inzetbaarheid op de arbeidsmarkt.

60 nieuwe scholen
Universumscholen richten zich op kwalitatief hoogwaardig en uitdagend bètatechnisch onderwijs met het doel om meer leerlingen te interesseren voor bètatechniek. Hierbij werken deze scholen vaak samen met bedrijven van Jet-Net[3].
Deze maand worden ruim 60 nieuwe scholen toegelaten tot het Universum Programma. Het totaal komt daarmee op 181 havo/vwo-scholen in Nederland. Dit is ruim 40% van het totaal aantal havo/vwo-scholen.

Noten
[1] Het onderzoek is uitgevoerd in opdracht van het Platform Bèta Techniek door Researchnet, gebaseerd op gegevens van het CFI. URL: *www.platformbetatechniek.nl*
[2] URL: *www.universumprogramma.nl*
[3] URL: *www.Jet-Net.nl*

Bron
Persbericht d.d. 1 mei 2009 van het Platform Bèta Techniek



De kennisbasis in de lerarenopleidingen

[Douwe van der Kooi]

Ongeveer een jaar geleden benaderde ik Marian Kollenveld met de vraag of het bestuur van de NVvW een oordeel zou willen geven over de landelijke kennisbasis van de lerarenopleidingen Wiskunde. Dat was voor haar aanleiding mij te vragen of ik in het bestuur van de Vereniging zitting wilde nemen met alles rondom opleiden en scholing van wiskundeleraren als aandachtsgebied. Waarmee maar gezegd is dat van het één altijd het ander komt. Dit artikel gaat over de kennisbasis van de tweedegraads lerarenopleidingen.

Voorgeschiedenis

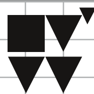
Met onderwijs is het net als met voetbal. In Nederland wonen 17 miljoen bondscoaches en iets minder, maar toch zeker 10 miljoen mensen die verstand hebben van onderwijs. Al die bondscoaches hebben maar één doel, namelijk wereldkampioen worden. Als het over het onderwijs gaat, dan staat de kwaliteit ter discussie. Daar heeft een ieder zo zijn opvattingen over.
Door de eeuwen heen roept een vigerende onderwijspraktijk een reactie op. Ik hoef alleen maar te wijzen op de curriculum-veranderingen de afgelopen vijftig jaar in de bovenbouw havo/vwo van ons eigen vak wiskunde. Het ene examenprogramma was nog niet goed uitgekristalliseerd of er kwamen al weer wijzigingen, soms marginaal, soms tamelijk fundamenteel. Hier past de metafoor van de klepel die dan de ene kant uitgaat en dan weer de andere, maar eeuwig in beweging is. De polemiek tussen Van de Craats en Treffers over het rekenonderwijs in Nederland is een exponent van die metafoor.
Binnen het hbo, en zeker binnen de lerarenopleidingen, begon het sociaal constructivisme eind jaren '90 van de vorige eeuw het leidend onderwijskundig beginsel te worden. Langzaam maar zeker worden de effecten van het daarmee samenhangend competentiegericht opleiden duidelijk. Opleiders constateren vaak dat studenten moeite hebben om goede leervragen te stellen. In het vo klaagt men dat docenten te weinig kennis en vakvaardigheden hebben. Commissies hebben zich gebogen over deze problemen, Beter Onderwijs Nederland is opgestaan en propageert het aanleren van authentieke kennis.

Aanleiding

In haar nota *Krachtig Meesterschap, Kwaliteitsagenda voor het opleiden van leraren 2008-2011* constateert de staatssecretaris in het voorwoord: 'Ik heb in de aanloop naar deze agenda een groot aantal gesprekken gevoerd met studenten en beginnende leraren. Zij vertelden mij dat ze zich inhoudelijk onvoldoende voorbereid voelen op het leraarschap. Daardoor voelen ze zich voor de klas vaak onzeker over de inhoud en vluchten dan in hun lessen in het aanleren van reflectie en algemene vaardigheden.' Haar nota beoogt de (vakinhoudelijke) kwaliteit van de docenten te verhogen. Haar adagium: Meer academici voor de klas! En lerarenopleidingen moeten hun studieprogramma afstemmen op een landelijk vastgestelde kennisbasis, die vervolgens centraal wordt getoetst. Daarnaast zouden lerarenopleidingen afspraken moeten maken over de bronnen die men gebruikt om de kennisbasis aan te brengen.
Er zou dus een kennisbank moeten komen, zeg maar een digitaal archief, waarin didactisch materiaal, lesmateriaal, artikelen, enz. is opgeslagen en waaruit alle lerarenopleidingen kunnen putten om hun onderwijs inhoudelijk in te richten en vorm te geven. Dit heeft geleid tot het zogeheten K3-project, dat staat voor: (ontwikkeling van) Kennisbasis, Kennistoetsen en Kennisbank. Voor elke opleiding zijn inmiddels redactieteams gevormd, die werken aan de totstandkoming van kennisbases voor de verschillende vakken. Na de zomervakantie 2009 worden de bijbehorende toetsen ontwikkeld, die vanaf de cursus 2010-2011 integraal worden ingevoerd. Daarna, zo is de bedoeling, wordt een kennisbank ontwikkeld.

Stand van zaken bij wiskunde

De tweedegraads opleidingen wiskunde onderhouden al sinds het ontstaan van de Nieuwe Lerarenopleidingen in begin van de jaren '70 van de vorige eeuw een goede onderlinge relatie. Zo maakt men gebruik van elkaars lesmateriaal. Eenmaal per twee jaar wordt een conferentie georganiseerd waarbij uitwisseling van 'good practice' centraal staat. Daarnaast treffen de teamleiders van de opleidingen elkaar enige malen per jaar. Door die goede onderlinge samenwerking liepen de wiskunde-opleidingen voorop wat betreft de ontwikkeling van een kennisbasis. Reeds in 2006 waren daarover landelijke afspraken gemaakt. De verschillende opleidingen hebben hun curriculum afgestemd op die landelijke afspraken. Daarmee is niet gezegd dat alle studenten van alle opleidingen de kennisbasis op dezelfde wijze hebben verwerkt. Kennis en vaardigheden kun je op verschillende niveaus toetsen. Onder de aanname dat de manier waarop je toetst sturend is voor het onderwijs, zal een meer op competentieontwikkeling gerichte opleiding vooral toetsen op de wijze waarop kennis wordt toegepast in een didactische context. Daarbij wordt dus meer gekeken of de kennis wordt beheerst op het niveau van de klas waarin wordt lesgegeven. Kennisintensieve opleidingen leggen ook nadruk op kennisbeheersing op andere niveaus, zoals het begrips- en analyseniveau. Naast de afgesproken kennisbasis is er een toetsenbank ontwikkeld met daarin opgenomen inmiddels zo'n 1000 toetsvragen, alle multiple choice in verband

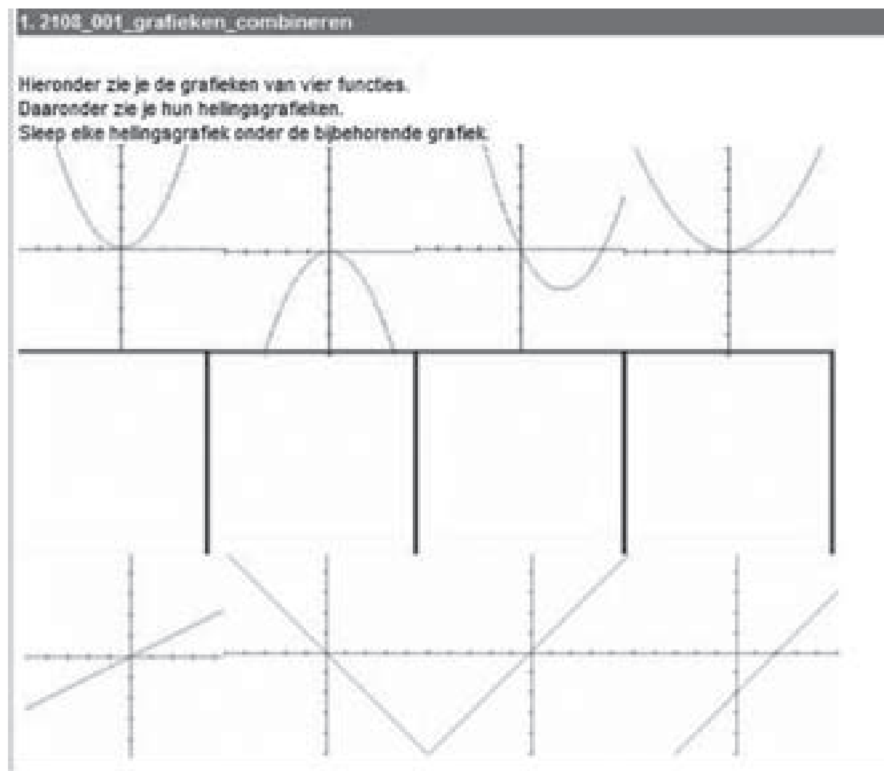


met de noodzaak de toetsen digitaal af te nemen. Deze toetsenbank wordt evenwel nauwelijks gebruikt in het land. Daarvoor zijn twee redenen aan te wijzen. Ten eerste, zoals boven betoogd, sluiten de items niet altijd goed aan bij het gegeven onderwijs, en ten tweede blijkt in de praktijk de toetsenbank niet gebruiksvriendelijk te zijn. Het is lastig om toetsen te genereren en het systeem is kwetsbaar. Het is vaak gebeurd dat studenten door een verkeerde druk op de knop ineens hun toets kwijt waren.
Er is ook gewerkt aan de ontwikkeling van een kennisbank op het gebied van de vakdidactiek. Via de portal van de site van het Ruud de Moorcentrum is vakdidactische achtergrondinformatie te vinden over (vrijwel) alle onderwerpen die aan de orde komen in de onderbouw van het vo (zie de website: *www.ou.nl/RDMC)*

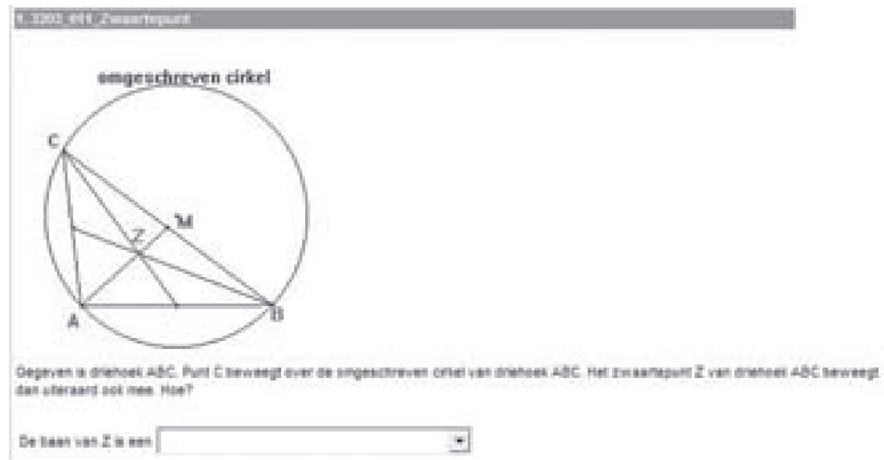
Verdere ontwikkelingen

De conclusie is gerechtvaardigd dat de opleidingen Wiskunde (met Geschiedenis en Biologie) vooroplopen bij de ontwikkeling van de kennisbasis, kennistoetsen en kennisbank. Toch dient er nog een heleboel te gebeuren. Er is ook voor wiskunde een redactiecommissie actief, die de bestaande kennisbasis herformuleert binnen het voorgeschreven format. Daarna wordt er verder gewerkt aan de ontwikkeling van toetsen, waarbij uiteraard gebruik zal worden gemaakt van het reeds ontwikkelde materiaal. Grootste probleem daarbij zal zijn de bestaande items onder te brengen in een nieuwe digitale omgeving, te weten MapleTA, zodat de toetsenbank gebruiksvriendelijker wordt.

Twee voorbeelden uit de kennisbasis wiskunde en een bijbehorend toetsitem.
Voorbeeld 1.
1.1.2 Differentiaalrekening:
Differentiequotiënt en hellinggrafieken, Differentiaalquotiënt en afgeleide, Afleiding regels voor differentiëren, Continuïteit en differentieerbaarheid
Zie figuur 1 voor een toetsitem dat hierover gaat.



figuur 1 Toetsitem differentiaalrekening



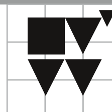
figuur 2 Toetsitem vlakke meetkunde

Voorbeeld 2.
2.1.1 Vlakke meetkunde:
Eigenschappen van figuren, Meetkundige plaatsen/puntverzamelingen, Gebieden en conflicten (Voronoi), Vlakvullingen en symmetrie, Congruentie- en gelijkvormigheidsafbeeldingen
Zie figuur 2 voor een toetsitem dat hierover gaat.

De beschrijving van de kennisbasis wiskunde is te vinden op:
www.kennisbasis.nl

Over de auteur

Douwe van der Kooi is bestuurslid van de NVvW, teamleider van de opleidingen Wiskunde en Nederlands en coördinator van de masteropleiding Wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam, domein Onderwijs en Opvoeding.



Jaarvergadering / Studiedag 2009

[Marianne Lambriex]

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2009 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op ***zaterdag 7 november 2009***.
Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:00 uur
Plaats: Anna Van Rijn College, locatie *Albatros* te Nieuwegein

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

- Opening door de voorzitter, mevr. drs. M. Kollenveld
- Jaarrede door de voorzitter
- Notulen van de jaarvergadering 2008 (zie een volgend nummer van *Euclides*)
- Jaarverslagen (zie een volgend nummer van *Euclides*)
- Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie
- Bestuursverkiezing en -overdracht
- Rondvraag
- Sluiting jaarvergadering

Themagedeelte

Wiskunde, daar kun je op rekenen!

Doorlopende leerlijnen en aansluitingsproblematiek zijn meer dan ooit, mede door de aanhoudende politieke aandacht voor wiskundeonderwijsland, een hot item. Dat een en ander niet echt soepel gaat, wisten we al, maar hoe goed weten we wat er aan beide zijden van de scheidslijnen aan onderwijs wordt gegeven en genoten? En wat weten we van de keuzes die zijn gemaakt, onder andere door een beperkte hoeveelheid onderwijstijd? Volgens ons levert dit genoeg stof op voor discussie en informatie-uitwisseling op de studiedag.
Een paar voorbeelden:

- Weten we in het vo wel goed hoe er in het po wordt gerekend? Denk bijvoorbeeld aan alle krantenkoppen waarin de staartdeling wordt genoemd als verloren goed uit een rijk verleden. Is dat echt zo? En wat wordt er dan nog wel aan delen gedaan in het po?
- De commissie Meijerink met zijn referentieniveau's; er wordt veel geld uitgetrokken om het rekenen weer op peil te krijgen. Op individuele scholen wordt er aan gewerkt, Cito maakt toetsen, het APS en het FI verzorgen cursussen, de vereniging heeft twee rekenprojecten (voor vmbo en havo C&M) en ook cTWO spreekt een woordje mee. Maar wat is eigenlijk functioneel rekenen en op welke manier besteed je daar aandacht aan; in de wiskundeles of daarnaast? En moet het ook functioneel zijn bij andere vakken? Hoe toets je het?
- Wat weet een bovenbouwdocent nog over wat wel en wat niet wordt behandeld in de onderbouw? Parallel daarmee: wat weten vmbo- en mbo-docenten van elkaars manier van wiskunde onderwijzen?
- En natuurlijk: hoe zit het met de algebraïsche vaardigheden in de overgang vo/ho? Hoe zijn de eerste examens van de 2007-programma's gevallen (of voelde het veld zich overvallen)? En wat mag er worden verwacht van de 2010-examens vwo? Hoe staat het met de vo/ho-dialoog over de aansluitingsproblematiek?

Allerlei (vervolg)opleidingen vinden dat je op wiskunde moet kunnen rekenen. En ook het rekenen moet op orde zijn. Kunnen wij dat blind garanderen of is het goed om daar wat genuanceerder over te praten?
Wij zullen een aantal personen en instellingen vragen een bijdrage te leveren aan de studiedag. We willen ook graag informatie en discussie, direct vanuit het veld, een plaats geven. En daarvoor is uw deelname nodig.

De organisatoren van de studiedag zijn:

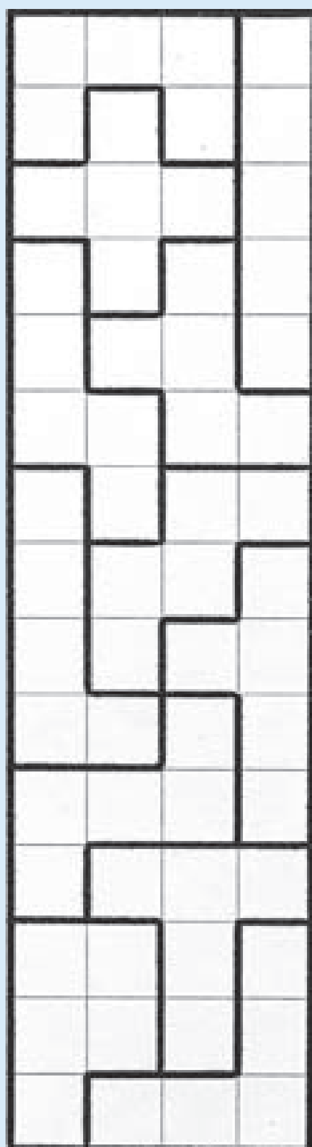
- Lidy Wesker, lerarenopleiding ILO van de UvA (*th.wesker@quicknet.nl*)
- Kenneth Tjon Soei Sjoe, lerarenopleiding wiskunde HvA-OO (*k.j.tjon.soei.sjoe@hva.nl*)
- Henk van der Kooij, bestuur NVvW (*h.v.d.kooij@nvvw.nl*)

U ziet er is voor een ieder wel iets interessants te vinden. En hoe het een en ander vorm gegeven wordt, laten we u in het volgende nummer van *Euclides* weten.
Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 7 november NVvWdag!
Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich wenden tot Marianne Lambriex (*m.lambriex@nvvw.nl*).

RECREATIE

Puzzel 84-8

Aan u de keus!


figuur 1

Sommige inzenders puzzelen graag met pentomino's, anderen zien liever andere opgaven.
Daarom krijgt u deze keer de keuze. U mag hetzij de pentomino-puzzels oplossen, hetzij de rijen voortzetten.

A. Pentomino-puzzels
Elk van de 12 pentomino's (***zie figuur 1***) moet zodanig in drieën worden verdeeld dat de drie stukken van de betreffende pentomino in een zo klein mogelijk vierkant passen. Dat zijn dus 12 opgaven. De stukken mogen worden omgedraaid. Voor een vierkant dat niet het allerkleinste is, kunt u toch punten krijgen. Ik weet trouwens niet of de vierkanten die ik tot nu toe heb verzameld, wel de kleinste zijn. Tekeningen zijn van harte welkom, maar als het voor u moeilijk is om deze te mailen, mag u (voorlopig) volstaan met de zijdelengten van uw vierkanten.

B. Rijen raden
U ziet hier zeven rijen. De bedoeling is dat u voor elk van deze rijen probeert te raden welk principe er achter zit. Ik weet wel dat er altijd meer manieren zijn om een rij voort te zetten, maar het gaat om een eenvoudig te verklaren voortzetting.

a. 17, 53, 113, 197, 305, **?**
b. 2, 5, 17, 37, 101, 197, 257, **?**
c. 4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, 102, **?**
d. **?**, 41, 12, 82, 53, 24, **?**
e. 3, 4, 6, 12, 60, 5040, **?**
f. 79, 176, 847, 1595, 7546, 14003, **?**

We besluiten met een probleem uit het eerder genoemde boekje van Dick Hess, *Puzzles From Around The World*. Hier volgt zijn letterlijke tekst.

'From England comes the series
…, 35, 45, 60, ***x***, 120, 180, 280, 450, 744, 1260, …
Find a simple continuous function to generate the series and compute the surprise answer for ***x***.'

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 26 augustus.
Veel plezier!

Oplossing 84-6

Rekenkundige rijen van kwadraat sommen

De opgaven waren deze keer niet al te eenvoudig, toch waren er 20 lezers die oplossingen instuurden.

Opgave 1 is door iedereen goed opgelost. Deze is nog heel goed zonder computer te doen, vooral als je bedenkt dat de eerste term een 8-voud is. Bovendien moet het 3-voud dat er onvermijdelijk bij zit, een 9-voud zijn. De eerste term is dus modulo 72 gelijk aan 0, 16 of 32. De meeste inzenders gaven 160, 162, 164 als oplossing.

Opgave 2 – Het is opvallend dat 15 van de 17 mensen die deze opgave goed oplosten, rijen instuurden die polynomiaal stijgen, namelijk als een vierde macht. Als ook de gevolgde methode werd aangegeven, bleek dat die in principe steeds dezelfde was.
De rij van Lieke de Rooij begint met $8p^4 + 8p^2$ ($p > 1$); de splitsingen in twee kwadraten zijn achtereenvolgens:
$(2p^2 - 2p)^2 + (2p^2 + 2p)^2$
$(2p^2 + 1)^2 + (2p^2 + 1)^2$
$(2p^2)^2 + (2p^2 + 2)^2$
Twee inzenders (en ik) hadden een rij die exponentieel stijgt en dus vrij dun gezaaid is, gebaseerd op oplossingen van een vergelijking van Pell.

Opgave 3 werd weer door iedereen goed opgelost. De meeste inzenders gaven de rij 757, 761, 765, 769, 773. Evenals bij opgave 1 waren er inzendingen met meer dan één rij. Helmut Postl spande de kroon door ook voor dit geval te bewijzen dat er oneindig veel oplossingen zijn!

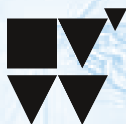
Opgave 4 – Ook hier 17 goede inzendingen. Een van de overige drie is van een inzender die zonder computer een rij van de lengte 18 met verschil 120 vond. Mijn aanvankelijke vertedering verdween toen ik me realiseerde dat een rij van die lengte en een verschil dat niet door 7 deelbaar is, hoe dan ook twee termen bevat die deelbaar zijn door 7. Slechts één van deze termen kan deelbaar zijn door 49. De andere behoort dus niet tot *A*.
Met een verschil 12 (of een 12-voud dat niet door 7 deelbaar is) is 13 de maximale lengte. Het kleinste voorbeeld met verschil 12 begint bij 33493. Deze rij werd door velen gevonden, steeds met behulp van een computer.
Als iemand probeert om met een ander verschil een rij te vinden die eerder begint, zal hij, bij verschil 84 aangekomen, zien dat 1217 al voldoende is. Deze rij heeft zelfs 21 termen, zoals gevonden werd door Wim van den Camp, Jozef Hanenberg, Jan Verbakel en Kees van der Straaten.
Nog langere rijen werden gevonden door Hans Klein, Gerhard Riphagen en Helmut Postl.

De Zomerprijsjes gaan naar Harm Bakker en Hans Linders. Zij ontvangen een boekenbon van respectievelijk 20 en 15 euro.
Gefeliciteerd!

Ladderstand
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
G. Riphagen 534
H. Klein 432
L. van den Raadt 425
W. Doyer 395
T. Kool 306
J. Hanenberg 297
N. Wensink 283
H. Linders 246
W. van den Camp 220
H. Bakker 218
K. Verhoeven 217
M. Woldinga 214
K. van der Straaten 202

SERVICEPAGINA

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie *www.wiskundeonderwijs.nl*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	22 september 2009	28 juli 2009
2	27 oktober 2009	1 sep 2009
3	22 december 2009	27 okt 2009
4	9 februari 2010	8 dec 2009
5	30 maart 2010	2 feb 2010
6	18 mei 2010	23 mrt 2010
7	6 juli 2010	11 mei 2010

ma. 17 en di. 18 augustus, Oostende (B)
T3-symposium 2009
Organisatie T3-Vlaanderen

ma. 17 t/m vr. 21 augustus, Utrecht
Utrecht Summer Schools in Science and Mathematics Education
Organisatie Universiteit Utrecht

vr. 21 en za. 22 augustus, CWI Amsterdam
vr. 28 en za. 29 augustus, TU/e Eindhoven
Vakantiecursus 2009 – Tel uit je winst
Organisatie CWI
Zie pag. 270 in nummer 7.

vrijdag 25 september, Utrecht
Studiemiddag in dialoog: Goed rekenonderwijs
Organisatie NVORWO

vr. 25 en za. 26 september, Nijmegen
Nascholing wiskunde D: Op de schouders van reuzen
Organisatie Radboud Universiteit

14 en 28 okt, 11 nov (woensdagen), Utrecht
Cursus Analytische Meetkunde voor Wiskunde D
Organisatie FIsme

zaterdag 7 november, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag: Op Wiskunde kun je Rekenen
Organisatie NVvW
Zie ook pag. 313 in dit nummer.

zaterdag 14 november
Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis

vrijdag 20 november, op de scholen
Wiskunde B-dag en Voorronde Wiskunde A-lympiade
Organisatie FIsme

2010
vr. 5 en za. 6 februari, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme
Zie ook pag. 264 in nummer 7.

PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

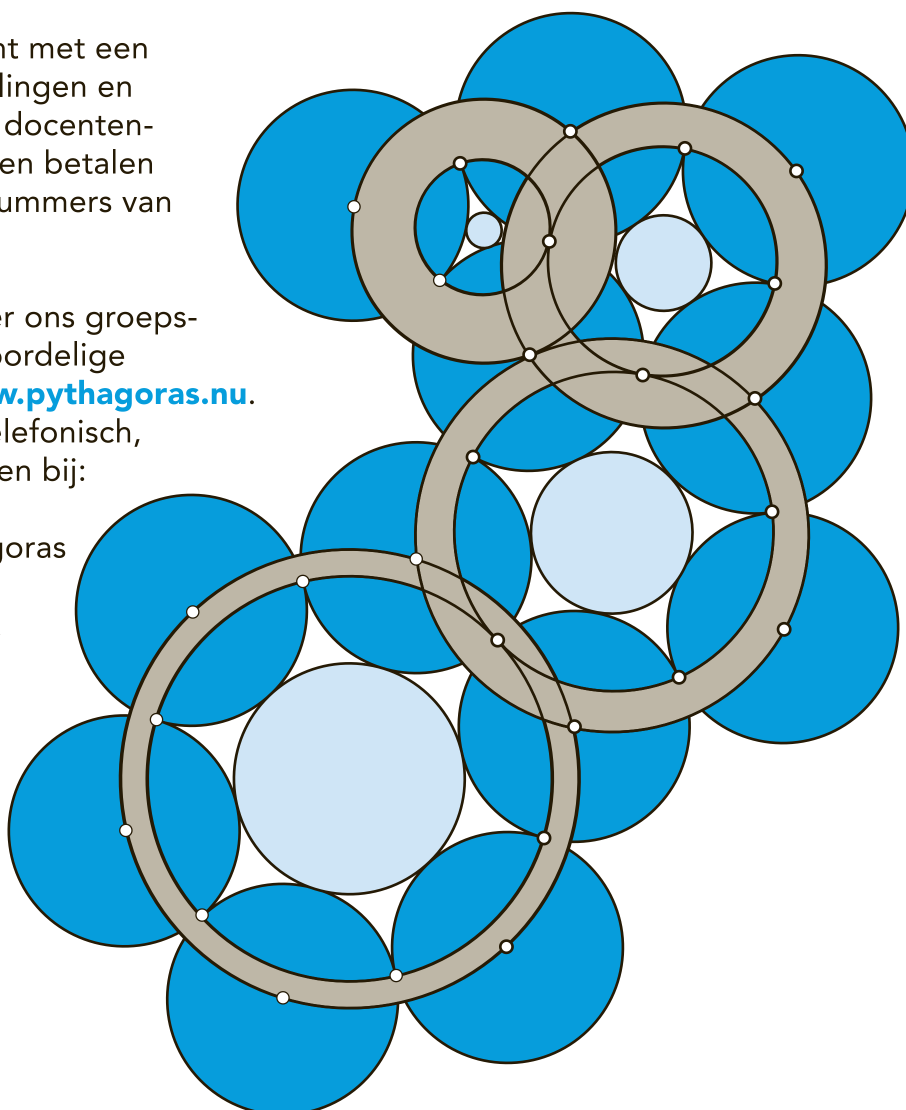
Uw leerlingen verdienen een bonus!

Pythagoras motiveert jongeren om meer uit uw wiskundelessen te halen. Zes keer per jaar publiceert *Pythagoras* artikelen over wiskunde, spelletjes, breinbrekers, wiskundige problemen en prijsvragen. In ieder nummer zijn er veel uitgangspunten voor activiteiten met de hele klas. Alle bijdragen zijn geschreven voor leerlingen in het middelbaar onderwijs. *Pythagoras* daagt uw leerlingen uit op hun niveau!

Neem een groepsabonnement met een groep van ten minste vijf leerlingen en ontvang van elk nummer een docentenexemplaar gratis! Uw leerlingen betalen slechts 12 euro voor de zes nummers van een jaargang.

Kijk voor meer informatie over ons groepsabonnement en de andere voordelige abonnementsvormen op **www.pythagoras.nu**. Ook kunt u abonnementen telefonisch, per e-mail of per post bestellen bij:

Abonneeadministratie Pythagoras
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 0522 855 175
abonneeadministratie@pythagoras.nu



9

MODERNE WISKUNDE

9[e] editie
voor vmbo, havo en vwo onderbouw

- Veel praktische wiskunde
- Extra aandacht voor rekenvaardigheden
- Afwisselend en motiverend
- Ook volledig digitaal beschikbaar


Noordhoff Uitgevers

Moderne wiskunde 9

Introduceert: Digitrainer Rekenen
Rekenoefeningen voor op de computer

Kijk voor meer informatie op www.modernewiskunde.noordhoff.nl